

XXVI Federalno takmičenje iz  
fizike za učenike srednjih  
škola

# BILTEN



Društvo fizičara u  
Federaciji Bosne i Hercegovine

Organizator: Društvo fizičara u Federaciji Bosne i Hercegovine

Domaćin: Prirodno-matematički fakultet u Sarajevu

Datum održavanja: 23/04/2022

Bilten pripremio: Benjamin Fetić

## Uspjeh mladih fizičara na 5. Evropskoj olimpijadi iz fizike

Peta po redu Evropska olimpijada iz fizike održana je 19. i 20. juna 2021. godine u online formatu na kojoj je učestvovalo 46 država iz čitavog svijeta. Olimpijada je otvorenog tipa tako da mogu i neevropske države učestvovati. Svaka država ima pravo da prijavi pet takmičara.

Predstavnici Bosne i Hercegovine na 5. Evropskoj olimpijadi iz fizike bili su

1. Marko Vučić (Gimnazija "Banja Luka", Banja Luka)
2. Ismail Brkić (Behram-begova medresa, Tuzla)
3. Fatih Žgalj (Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo)
4. Jelena Jeličić (Gimnazija "Banja Luka", Banja Luka)
5. Azra Alagić (Treća gimnazija, Sarajevo)

i postignuti su sljedeći rezultati:

- Marko Vučić - srebrena medalja,
- Fatih Žgalj - bronzana medalja,
- Ismail Brkić - pohvala.

Voditelji ekipe bili su Senad Isaković i Muhamed Sokolović. U pripremanju ekipe učestvovali su i Davor Bokan, Admir Papić, Fahrudin Delić i Bahrudin Trbalić.



## Uspjeh mladih fizičara na 51. Međunarodnoj olimpijadi iz fizike

U julu 2021. godine održana je 51. Međunarodna olimpijada iz fizike. Organizator olimpijade je bila Litvanija. Učenici nisu putovali u državu domaćina nego su eksperimentalne i teorijske zadatke radili u prostorijama Richmond Park School na Ilidži.

Predstavnici Bosne i Hercegovine na 51. Međunarodnoj olimpijadi iz fizike bili su Marko Vučić (Gimnazija "Banja Luka", Banja Luka, treći razred), Ismail Brkić (Behram-begova medresa, Tuzla, četvrti razred), Fatih Žgalj (Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, treći razred), Dženan Midžić (Gimnazija "Bihać", Bihać, drugi razred) i Adin Frljak (Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, drugi razred).



Postignuti su sljedeći rezultati:

- Fatih Žgalj - bronzana medalja,
- Marko Vučić - bronzana medalja,
- Ismail Brkić - pohvala.

Voditelji ekipe bili su Benjamin Fetić i Admir Papić. Posmatrači zaduženi za tehničku realizaciju takmičenja bili su Farah Hesham Nafi i Davor Bokan.

Učešće bh. mladih fizičara na 51. Međunarodnoj olimpijadi finansijski su podržali Pedagoški zavod RS, Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport TK, Pedagoški zavod USK, i Ministarstvo za odgoj i obrazovanje KS. Posebno se želimo zahvaliti ministrici za odgoj i obrazovanje KS, gospođi Naidi Hota-Muminović koja je zaslužna jer je Vlada KS i nadležno ministarstvo pored troškova kotizacije za učenike iz KS pokrila i sve ostale materijalne troškove

organizacije kao što su ishrana tokom priprema, kupovina web kamera za potrebe online takmičenja, ishrana cijele ekipe tokom boravka u internatu za vrijeme trajanja takmičarskog dijela olimpijade, troškovi uvoza eksperimentalne opreme na kojoj su učenici radili eksperimentalne zadatke i dr. Zahvaljujemo se gospodinu Safetu Deliću i doc. dr. Zenanu Šabancu na pomoći oko uvoza eksperimentalne opreme koju su nam poslali organizatori iz Litvanije. Zahvaljujemo se gospodinu Herminu Kapetanoviću, direktoru Richmond Park School na Ilidži i ostalim usposlenicima škole na pomoći oko organizacije takmičenja.

## **Takmičarska komisija za sastavljanje i pregledanje zadataka**

### **GRUPA A – mehanika i termodinamika**

1. Dino Habibović (supervizor)
2. Kenan Saračević
3. Majra Šišić
4. Ismail Brkić

### **GRUPA B – elektromagnetizam, oscilacije i talasi**

1. Amra Salčinović Fetić (supervizor)
2. Abdulah Jašarević
3. Kenan Selman
4. Admir Papić
5. Amina Mević

### **GRUPA C – optika, atomska i nuklearna fizika**

1. Mirsad Tunja (supervizor)
2. Emir Baručija
3. Nola Šegalo
4. Darko Kolenda

### **GRUPA D – cjelokupna fizika**

1. Muhamed Sokolović (supervizor)
2. Benjamin Fetić
3. Abdulah Jašarević

U organizaciji takmičenja učestovali su Senad Isaković i Farah Hesham Nafi.

## XXVI FEDERALNO TAKMIČENJE IZ FIZIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2022.

### GRUPA A - MEHANIKA I TERMODINAMIKA

**Zadatak 1:** Dva tijela su bačena istovremeno iz iste tačke na zemlji – jedno vertikalno naviše, a drugo pod uglom  $60^\circ$  prema horizontu. Početna brzina oba tijela je  $25 \text{ m/s}$ . Naći rastojanje između tijela poslije  $1,7 \text{ s}$ . (25 b)

**Zadatak 2:** Šuplja lopta sa tankim zidovima se kotrlja bez klizanja niz strmu ravan nagibnog ugla  $\theta$ . Koeficijent statičkog trenja je  $\mu_s$ . Odrediti ubrzanje centra masa lopte, silu trenja koja djeluje na loptu i maksimalni ugao strme ravni za koji se lopta kotrlja bez klizanja. Centralni moment inercije šuplje lopte mase  $m$  i poluprečnika  $r$  je  $2mr^2/3$ . (25 b)

**Zadatak 3:** U vašoj srednjoškolskoj karijeri ste se često susretali sa pitanjem “Čime ćeš se baviti kad porasteš?”. Kroz ovaj zadatak ćete uvidjeti kako o tom pitanju razmišljati kao fizičar. Na primjeru izuzetno zahtjevne dužnosti vatrogasca, analizirat ćete fizikalne fenomene koji se javljaju u toku njihove svakodnevnice. Zadatak se sastoji iz tri dijela koja možete rješavati neovisno jedan od drugog. U svim dijelovima zadatka važi pretpostavka da je voda idealan fluid.

#### 1. DIO

Iz prakse je poznato da, ukoliko vatrogasac drži mlaznicu koja je crijevom povezana na hidrant (*Slika 1*), pri isticanju mlaza vode vatrogasac osjeća dejstvo sile koja je usmjerena suprotno od smjera isticanja mlaza. U tipičnom objašnjenju ovog fenomena se navodi da je ta sila posljedica isticanja mlaza, što se opravdava Trećim Njutnovim zakonom. Naime, ovakvo objašnjenje nije tačno iz razloga što crijevo, samo po sebi, nije uzrok isticanju. Stvarni uzrok jeste pumpa koja obezbjeđuje razliku pritiska, što rezultuje ubrzanim kretanjem čestica fluida. U ovom dijelu zadatka ćemo razmotriti koji je to uzrok sile koja djeluje na vatrogasaca u opisanoj situaciji.

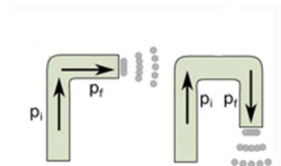
Izradi zadatka pristupite sa pretpostavkom da pumpa za vrlo kratak vremenski interval uspostavi stacionarno strujanje vode u crijevu. To znači da je intenzitet brzine dijela fluida u posmatranoj tački konstantan u toku vremena.

1.1.	Da li je pritisak u hidrantu (koji je ispravan) veći od atmosferskog pritiska, ukoliko sva masa vode miruje prije priključenja crijeva na hidrant? Na osnovu čega to zaključujete?	1
------	--	---

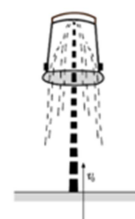
1.2.	Posmatrajte dva dijela crijeva različitih geometrija sa <i>Slike 2</i> . $p_i$ i $p_f$ su količine kretanja dijela fluida koji posmatramo, prije nego naiđe na zakrivljeni dio crijeva, te nakon što protekne kroz njega. Prikažite sile koje djeluju na dijelove crijeva. Izvedite izraz za silu koja djeluje na crijevo u oba slučaja preko: $Q_m$ – masenog protoka vode ( $kg/s$ ) i $v$ – brzine strujanja vode kroz crijevo.	4
1.3.	Na osnovu rezultata iz dijela 1.2, objasnite zbog čega se javlja sila koja djeluje na vatrogasca.	1.5
1.4.	Da li postoji geometrija crijeva pri kojoj bi ta sila bila jednaka nuli? U ovom dijelu zadatka trebate nacrtati oblik crijeva, položaj hidranta i vatrogasca.	1.5



Slika 1



Slika 2



Slika 3

## 2. DIO

Nakon iscrpljujućeg dana i vatrogasci se često zaigraju. U ovom dijelu se pitamo na kojoj maksimalnoj visini vatrogasci pomoću mlaza vode mogu održavati kantu u vazduhu. (*Slika 3*)

Kantu mase  $m = 15\text{kg}$ , okrenutu naopačke, vatrogasac pokušava da održava u vazduhu i to pomoću mlaza vode koji na nivou zemlje ima brzinu  $v_0 = 20\text{ m/s}$ . Maseni protok vode je

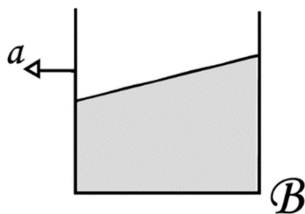
$$Q_m = 1000\text{ kg/min}$$

2.1.	Odrediti maksimalnu visinu na kojoj se kanta može održavati u ravnoteži.	6.5
2.2.	Odrediti najmanju vrijednost brzine $v_0$ pri kojoj kanta uopće počne da se podiže naviše sa zemlje.	1.5

Sudare čestica vode sa dnom kante smatrati idealno elastičnim, te pretpostaviti da strujnice mlaza padaju okomito na dno kante! Efekat divergencije mlaza nakon sudara sa kantom zanemariti.

### 3. DIO

U finalnom dijelu zadatka bavit ćemo se vatrogasnim avionom. Kontrola leta takvog aviona, između ostalog, zahtjeva kontrolu ubrzanja. Ubrzanje aviona koji ubrzava isključivo u pravcu x-ose ćemo mjeriti pomoću sistema prikazanog na *Slici 4*.



Posuda oblika kocke stranice  $L = 3\text{ m}$  dopola je napunjena vodom, te je postavljena u vatrogasni avion. Senzor hidrostatičkog pritiska je postavljen u tačku **B**. Gustina vode je  $\rho = 990\text{ kg / m}^3$ , a vrijednost gravitacionog ubrzanja je  $g = 9.81\text{ m / s}^2$ . Zanimajte uticaj atmosferskog pritiska.

*Slika 4*

3.1.	Koliki pritisak detektuje senzor ukoliko avion ne ubrzava?	0.5
3.2.	Zamislite da rješavate prethodni problem u slučaju kada avion uopće ne ubrzava, ali se nalazi u gravitacionom polju sa ubrzanjem $\sqrt{a^2 + g^2}$ . Koji bi izraz tada koristili za određivanje hidrostatičkog pritiska?	0.5
3.3.	Da li je tačno da je rezultujuća sila koja djeluje na tečnost, i uzrokuje promjenu pritiska sa dubinom, uvijek okomita na slobodnu površinu tečnosti, u slučaju kada je tečnost u hidrostatičkoj ravnoteži? Ako jeste, ukratko objasnite zašto!	1
3.4.	Odrediti ubrzanje aviona u trenutku kada senzor pritiska detektuje vrijednost od $p_B = 2.1 \cdot 10^4\text{ Pa}$ . Vatrogasni pilot je održavao traženo ubrzanje konstantnim dovoljno vremena da se uspostavi hidrostatičko stanje vode u posudi.	7

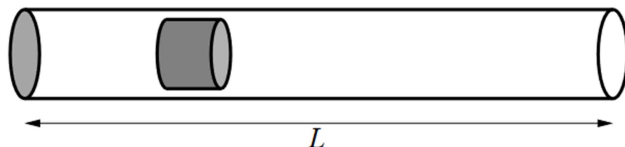
**Zadatak 4:** U laboratoriji imamo cilindričnu horizontalnu cijev, površine poprečnog presjeka  $A$ , s kojom vršimo dva niza mjerenja.

- a) Za prvo mjerenje ćemo cijev sa jedne strane zatvoriti i ispaljivat ćemo metak sa zatvorenog kraja cijevi. U početnom trenutku, kada se metak ispuca, cijev miruje. Zapremina između kraja cijevi i metka je  $V_0$  i pritisak u toj zapremini je  $P_0$ . Atmosferski pritisak je  $P_{\text{atm}}$  i vrijedi da je  $P_0 > P_{\text{atm}}$ . Plin u cilindru je dvoatomska, što znači da je  $C_p=7/2$  i  $C_v=5/2$ . Metak se kreće veoma brzo kroz cilindar, tako da se toplina ne prenosi na plin kojim je metak okružen u cilindru. Trenje između metka i cilindra je zanemarivo i oko metka ne „curi“ plin.

Parametri  $P_0$ ,  $P_{\text{atm}}$ ,  $V_0$  i  $A$  su fiksni, ali ukupna dužina cilindra  $L$  može varirati.

- i. Koja je maksimalna kinetička energija  $E_{\text{max}}$ , koju možemo izmjeriti, sa kojom metak može napustiti cilindar? Odgovor izraziti preko  $P_0$ ,  $P_{\text{atm}}$  i  $V_0$ .  
(7 b)

- ii. Koja je dužina  $L$  u ovom slučaju? Izraziti preko  $P_0$ ,  $P_{\text{atm}}$ ,  $V_0$  i  $A$ . (2 b)



*Slika 1 – Prikaz cilindrične cijevi i metka koji se ispaljuje*

- b) U drugom nizu mjerenja, cijev ćemo zatvoriti i sa druge strane i u nju ubaciti pokretni klip. Pokretni klip drži 2 mola zraka. Originalno „zarobljeni“ zrak ima pritisak od jedne atmosfere, zapreminu  $V_0$  i temperaturu  $T_0 = 298$  K. Zrak prvo prolazi kroz proces A, gdje se zrak u cilindru sabija uz konstantu temperaturu do zapremine  $1/4V_0$ . Zatim se u procesu B zrak adijabatski širi do zapremine  $V = 15,0$  L. U procesu C se klip povlači tako da dozvoljava gasu da se ponovo proširi na originalnu zapreminu  $V_0$ , pri konstantnoj temperaturi. I konačno, držeći zapreminu konstantnom, gas vraćamo na originalnu temperaturu  $T_0$ . Isto kao i u prvom eksperimentu i ovdje smo radili sa dvoatomskim plinom (podaci isti za  $C_p$  i  $C_v$  kao u a).
- Napisati za svaki od procesa A, B, C i D o kojem se procesu radi? Nacrtati P-V dijagram cjelokupnog procesa. (7 b)
  - Koliki rad se izvrši nad zarobljenim zrakom tokom procesa A? (3 b)
  - Koja je krajnja temperatura zraka na kraju procesa B? (6 b)

Napomena: Vrijeme predviđeno za izradu zadatka je 3 sata. Nije dozvoljena upotreba pomoćne literature. Dozvoljena je upotreba kalkulatora.

## XXVI FEDERALNO TAKMIČENJE IZ FIZIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2022.

### A: MEHANIKA I TERMODINAMIKA

**Zadatak 1:** Dva tijela su bačena istovremeno iz iste tačke na zemlji – jedno vertikalno naviše, a drugo pod uglom  $60^\circ$  prema horizontu. Početna brzina oba tijela je  $25 \text{ m/s}$ . Naći rastojanje između tijela poslije  $1,7\text{s}$ . (25 b)

#### Rješenje 1:

##### Prvo tijelo

$$y_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_1 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,7\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1,7\text{s})^2$$

$$y_1 = 28,32\text{m}$$

(7 b)

##### Drugo tijelo

$$x_2 = \frac{v_0}{2} t$$

$$x_2 = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \cdot 1,7\text{s}$$

$$x_2 = 21,25\text{m}$$

(7 b)

$$y_2 = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_2 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,7\text{s} \cdot 0,86 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1,7\text{s})^2$$

$$y_2 = 22,37\text{m}$$

(7 b)

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + x_2^2}$$
$$d = \sqrt{(22,37m - 28,32m)^2 + (21,25m)^2}$$
$$d = 22m$$

(4 b)

**Zadatak 2:** Šuplja lopta sa tankim zidovima se kotrlja bez klizanja niz strmu ravan nagibnog ugla  $\theta$ . Koeficijent statičkog trenja je  $\mu_s$ . Odrediti ubrzanje centra masa lopte, silu trenja koja djeluje na loptu i maksimalni ugao strme ravni za koji se lopta kotrlja bez klizanja. Centralni moment inercije šuplje lopte mase  $m$  i poluprečnika  $r$  je  $2mr^2/3$ . (25 b)

### Rješenje 2:

Jednačine koje određuju kretanja su

$$mg\sin\theta - F_{trs} = ma,$$

$$N - mg\cos\theta = 0,$$

$$F_{trs}r = I_0\alpha,$$

(6 b)

pri čemu je  $\alpha = a/r$  (**1b**) jer se lopta kotrlja bez klizanja. Iz treće jednačine silu trenja možemo napisati kao

$$F_{trs} = 2ma/3,$$

(3 b)

što u kombinaciji sa prvom jednačinom daje ubrzanje

$$a = 3g\sin\theta/5,$$

(5 b)

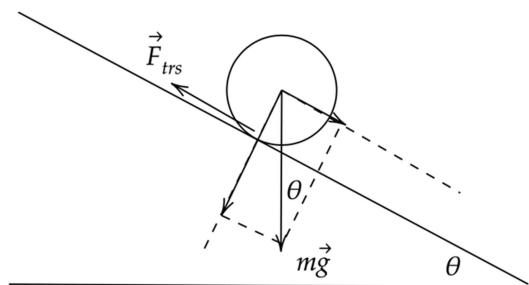
dok za silu trenja dobijamo

$$F_{trs} = 2mg\sin\theta/5. \quad (2 \text{ b})$$

Koristeći izraz za silu reakcije podloge  $N = mg\cos\theta$  i  $F_{trsmax} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta_{max}$  dobijamo

$$\frac{2}{5}mg\sin\theta_{max} = \mu_s mg\cos\theta_{max}$$

$$\theta_{max} = \arctg(5\mu_s/2) \quad (5 \text{ b})$$



(3 b)

**Zadatak 3:** U vašoj srednjoškolskoj karijeri ste se često susretali sa pitanjem “Čime ćeš se baviti kad porasteš?”. Kroz ovaj zadatak ćete uvidjeti kako o tom pitanju razmišljati kao fizičar. Na primjeru izuzetno zahtjevne dužnosti vatrogasca, analizirat ćete fizikalne fenomene koji se javljaju u toku njihove svakodnevnice. Zadatak se sastoji iz tri dijela koja možete rješavati neovisno jedan od drugog. U svim dijelovima zadatka važi pretpostavka da je voda idealan fluid.

#### 4. DIO

Iz prakse je poznato da ukoliko vatrogasac drži mlaznicu koja je crijevom povezana na hidrant (*Slika 1*), pri isticanju mlaza vode vatrogasac osjeća dejstvo sile koja je usmjerena suprotno od smjera isticanja mlaza. U tipičnom objašnjenju ovog fenomena se navodi da je ta sila posljedica isticanja mlaza, što se opravdava Trećim Njutnovim zakonom. Naime, ovakvo objašnjenje nije tačno, iz razloga što crijevo, samo po sebi, nije uzrok isticanju. Stvarni uzrok jeste pumpa koja

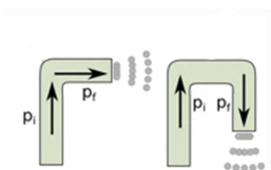
obezbjeđuje razliku pritisaka, što rezultuje ubrzanim kretanjem čestica fluida. U ovom dijelu zadatka ćemo razmotriti koji je to uzrok sile koja djeluje na vatrogasaca u opisanoj situaciji.

Izradi zadatka pristupite sa pretpostavkom da pumpa za vrlo kratak vremenski interval uspostavi stacionarno strujanje vode u crijevu. To znači da je intenzitet brzine dijela fluida u posmatranoj tački konstantan u toku vremena.

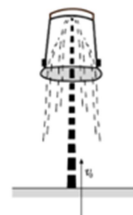
1.1.	Da li je pritisak u hidrantu (koji je ispravan) veći od atmosferskog pritiska, ukoliko sva masa vode miruje prije priključenja crijeva na hidrant? Na osnovu čega to zaključujete?	1
1.2.	Posmatrajte dva dijela crijeva različitih geometrija sa <i>Slike 2</i> . $p_i$ i $p_f$ su količine kretanja dijela fluida koji posmatramo, prije nego naiđe na zakrivljeni dio crijeva, te nakon što protokne kroz njega. Prikažite sile koje djeluju na dijelove crijeva. Izvedite izraz za silu koja djeluje na crijevo u oba slučaja preko: $Q_m$ – masenog protoka vode ( $kg/s$ ) i $v$ – brzine strujanja vode kroz crijevo.	4
1.3.	Na osnovu rezultata iz dijela 1.2, objasnite zbog čega se javlja sila koja djeluje na vatrogasca.	1.5
1.4.	Da li postoji geometrija crijeva, pri kojoj bi ta sila bila jednaka nuli? U ovom dijelu zadatka trebate nacrtati oblik crijeva, položaj hidranta i vatrogasca.	1.5



Slika 1



Slika 2



Slika 3

## 5. DIO

Nakon iscrpljujućeg dana i vatrogasci se često zaigraju. U ovom dijelu se pitamo na kojoj maksimalnoj visini vatrogasci pomoću mlaza vode mogu održavati kantu u vazduhu. (*Slika 3*)

Kantu mase  $m = 15kg$ , okrenutu naopačke, vatrogasac pokušava da održava u vazduhu, i to pomoću mlaza vode koji na nivou zemlje ima brzinu  $v_0 = 20 m/s$ . Maseni protok vode je

$$Q_m = 1000 \text{ kg}/\text{min}$$

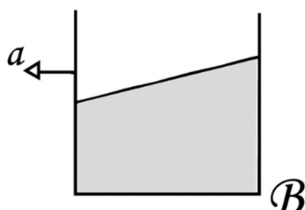
2.1.	Odrediti maksimalnu visinu na kojoj se kanta može održavati u ravnoteži.	6.5
------	--	-----

2.2.	Odrediti najmanju vrijednost brzine $v_0$ pri kojoj kanta uopće počne da se podiže naviše sa zemlje.	1.5
------	--	-----

Sudare čestica vode sa dnom kante smatrati idealno elastičnim, te pretpostaviti da strujnice mlaza padaju okomito na dno kante! Efekat divergencije mlaza nakon sudara sa kantom zanemariti.

## 6. DIO

U finalnom dijelu zadatka bavit ćemo se vatrogasnim avionom. Kontrola leta takvog aviona, između ostalog, zahtjeva kontrolu ubrzanja. Ubrzanje aviona koji ubrzava isključivo u pravcu x-ose ćemo mjeriti pomoću sistema prikazanog na *Slici 4*.



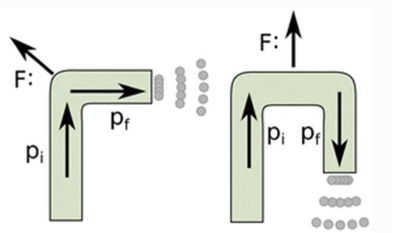
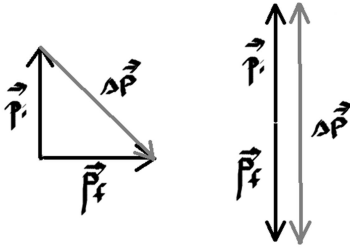
Posuda oblika kocke stranice  $L = 3\text{m}$  dopola je napunjena vodom, te je postavljena u vatrogasni avion. Senzor hidrostatičkog pritiska je postavljen u tačku **B**. Gustina vode je  $\rho = 990\text{ kg / m}^3$ , a vrijednost gravitacionog ubrzanja je  $g = 9.81\text{ m / s}^2$ . Zanemarite uticaj atmosferskog pritiska.

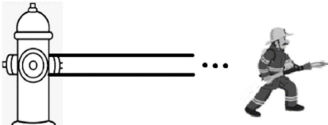
*Slika 4*

3.1.	Koliki pritisak detektuje senzor ukoliko avion ne ubrzava?	0.5
3.2.	Zamislite da rješavate prethodni problem u slučaju kada avion uopće ne ubrzava, ali se nalazi u gravitacionom polju sa ubrzanjem $\sqrt{a^2 + g^2}$ . Koji bi izraz tada koristili za određivanje hidrostatičkog pritiska?	0.5
3.3.	Da li je tačno da je rezultujuća sila koja djeluje na tečnost, i uzrokuje promjenu pritiska sa dubinom, uvijek okomita na slobodnu površinu tečnosti, u slučaju kada je tečnost u hidrostatičkoj ravnoteži? Ako jeste, ukratko objasnite zašto!	1
3.4.	Odrediti ubrzanje aviona u trenutku kada senzor pritiska detektuje vrijednost od $p_B = 2.1 * 10^4\text{ Pa}$ . Vatrogasni pilot je održavao traženo ubrzanje konstantnim dovoljno vremena da se uspostavi hidrostatičko stanje vode u posudi.	7

### Rješenje 3:

#### 1. DIO

1.1.	<p>Neka je <math>p_H</math> pritisak u hidrantu, <math>p_a</math> atmosferski pritisak, a <math>S</math> površina poprečnog presjeka crijeva. Tada je rezultujuća sila koja djeluje na česticu fluida mase <math>m</math> data kao:</p> $F = (p_H - p_a) * S = m * a$ <p>Samo ukoliko je <math>p_a &lt; p_H</math> čestice fluida će ubrzavati prema izlazu iz crijeva.</p>	0.5  0.5
1.2.	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">   </div> <p style="text-align: center;"><i>Slika 1</i> <span style="margin-left: 200px;"><i>Slika 2</i></span></p> <p>Prema Drugom i Trećem njutnovom zakonu, sila kojom djeluje djelić vode na crijevo, pri promjeni njene količine kretanja za <math>\Delta p</math> je:</p> $F = -\frac{\Delta p}{\Delta t}, \quad \Delta p = p_f - p_i$ <p>Kako je strujanje vode stacionarno, to je <math>p_f = p_i = \Delta m * v</math>, gdje je <math>\Delta m</math> masa vode koja protekne kroz zakrivljeni dio crijeva za vrijeme <math>\Delta t</math>. Maseni protok je definisan kao:</p> $Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ <p>U prvom slučaju, intenzitet sile je:</p> $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta m * v)^2 + (\Delta m * v)^2}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{2} * \Delta m * v}{\Delta t} = \sqrt{2} Q_m v$ <p>U drugom slučaju, intenzitet sile je:</p> $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2 * \Delta m * v}{\Delta t} = 2 Q_m v$ <p>Promjene količine kretanja su određene uz pomoć <i>Slike 2</i>.</p>	1  0.5  0.5  1  1
1.3.	Vatrogasac osjeća silu koja je posljedica promjene količine kretanja dijelova mase vode koji protiču kroz zakrivljene dijelove crijeva.	1.5

1.4.		Da, postoji. Ukoliko crijevo nije zakrivljeno tada nema ni sile na vatrogasca.	1 0.5
------	---	--	----------

## 2. DIO

	<p>Na osnovu Bernulijeve jednačine, jasno je da se brzina mlaza smanjuje sa visinom. Ako sa <math>h</math> označimo visinu na kojoj se kanta održava u ravnoteži, na toj visini brzina mlaza vode je:</p> $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$ <p>Pri podizanju kante sa površine Zemlje sila kojom mlaz vode djeluje na kantu je veća od sile teže koja djeluje na kantu. U trenutku kada se kanta održava u ravnoteži, sila mlaza je jednaka sili teže, a brzina kante u odnosu na zemlju je jednaka nuli.</p> <p>Za vrijeme <math>\Delta t</math>, dio vode mase <math>\Delta m</math> se idealno elastično sudari sa površinom kante, pri čemu je promjena količine kretanja dijela mlaza:</p> $\Delta p = 2\Delta m v = 2\Delta m * \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ <p>2.1. Sila kojom mlaz djeluje na kantu je tada:</p> $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2\Delta m * \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{\Delta t} = 2Q_m \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ <p>Prethodno smo zaključili da ta sila mora biti brojno jednaka sili teže koja djeluje na kantu, pa konačno imamo:</p> $2Q_m \sqrt{v_0^2 - 2gh} = mg$ $h = \frac{1}{2g} \left( v_0^2 - \left( \frac{mg}{2Q_m} \right)^2 \right)$ <p><b><math>h = 19.4 \text{ m}</math></b></p>	2 1 1 1 1 0.5
2.2.	Iz rješenja prethodnog dijela zadatka, uz uslov $h > 0$ :	



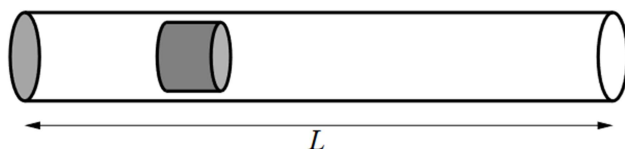
	<p>Kako rezultujuća sila koja uzrokuje promjenu pritiska sa dubinom uvijek djeluje okomito na slobodnu površinu tečnosti u hidrostatičkoj ravnoteži, to će površina vode u posudi biti nagnuta pod uglom:</p> $tg(\alpha) = \left(\frac{ma}{mg}\right) \Rightarrow \alpha = arctg\left(\frac{a}{g}\right) \quad (*)$ <p>Po analogiji sa tečnosti koja se nalazi isključivo u polju Zemljine težje, jasno je da pritisak mora biti isti u svim tačkama koje pripadaju ravni normalnoj na pravac rezultujuće sile koja izaziva taj pritisak. Koristeći se rezultatom iz dijela 3.2., pritisak u funkciji udaljenosti od slobodne površine tečnosti je dat kao:</p> $p_B(x) = \rho\sqrt{(a^2 + g^2)}x \quad (**)$ <p>Dužinu <math>x</math> određujemo iz uslova da se zapremina vode nije promijenila pri ubrzavanju, te uz jednostavne trigonometrijske relacije sa slike:</p> $\frac{l^3}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} * l^2 \Rightarrow l = y_1 + y_2$ $l = y_1 + (y_1 - ltg(\alpha))$ $cos(\alpha) = \frac{x}{y_1}$ <p>Iz prethodnih jednačina, uz (*):</p> $x = \frac{l}{2} * \frac{a + g}{\sqrt{a^2 + g^2}}$ <p>Finalno, iz prethodne jednačine i jednačine (**):</p> $p_B = \frac{\rho l(a + g)}{2}$ $a = \frac{2p_B}{\rho l} - g$ $a = 4.33 \frac{m}{s^2}$	<p>1</p> <p>1.5</p> <p>1</p> <p>0.5</p> <p>1</p> <p>0.5</p>
--	---	---

**Zadatak 4:** U laboratoriji imamo cilindričnu horizontalnu cijev, površine poprečnog presjeka  $A$ , s kojom vršimo dva niza mjerenja.

- c) Za prvo mjerenje ćemo cijev sa jedne strane zatvoriti i ispaljivat ćemo metak sa zatvorenog kraja cijevi. U početnom trenutku, kada se metak ispuca, cijev miruje. Zapremina između kraja cijevi i metka je  $V_0$  i pritisak u toj zapremini je  $P_0$ . Atmosferski pritisak je  $P_{\text{atm}}$  i vrijedi da je  $P_0 > P_{\text{atm}}$ . Plin u cilindru je dvoatomski, što znači da je  $C_p=7/2$  i  $C_v=5/2$ . Metak se kreće veoma brzo kroz cilindar, tako da se toplina ne prenosi na plin kojim je metak okružen u cilindru. Trenje između metka i cilindra je zanemarivo i oko metka ne „curi“ plin.

Parametri  $P_0$ ,  $P_{\text{atm}}$ ,  $V_0$  i  $A$  su fiksni, ali ukupna dužina cilindra  $L$  može varirati.

- Koja je maksimalna kinetička energija  $E_{\text{max}}$ , koju možemo izmjeriti, sa kojom metak može napustiti cilindar? Odgovor izraziti preko  $P_0$ ,  $P_{\text{atm}}$  i  $V_0$ . (7 b)
- Koja je dužina  $L$  u ovom slučaju? Izraziti preko  $P_0$ ,  $P_{\text{atm}}$ ,  $V_0$  i  $A$ . (2 b)



*Slika 2 – Prikaz cilindrične cijevi i metka koji se ispaljuje*

- d) U drugom nizu mjerenja, cijev ćemo zatvoriti i sa druge strane i u nju ubaciti pokretni klip. Pokretni klip drži 2 mola zraka. Originalno „zarobljeni“ zrak ima pritisak od jedne atmosfere, zapreminu  $V_0$  i temperaturu  $T_0 = 298$  K. Zrak prvo prolazi kroz proces A, gdje se zrak u cilindru sabija uz konstantu temperaturu do zapremine  $1/4V_0$ . Zatim se u procesu B zrak adijabatski širi do zapremine  $V = 15,0$  L. U procesu C se klip povlači tako da dozvoljava gasu da se ponovo proširi na originalnu zapreminu  $V_0$ , pri konstantnoj temperaturi. I konačno, držeći zapreminu konstantnom, gas vraćamo na originalnu temperaturu  $T_0$ . Isto kao i u prvom eksperimentu i ovdje smo radili sa dvoatomskim plinom (podaci isti za  $C_p$  i  $C_v$  kao u a).
- Napisati za svaki od procesa A, B, C i D o kojem se procesu radi? Nacrtati P-V dijagram cjelokupnog procesa. (7 b)
  - Koliki rad se izvrši nad zarobljenim zrakom tokom procesa A? (3 b)
  - Koja je krajnja temperatura zraka na kraju procesa B? (6 b)

#### Rješenje 4:

- a) Rješenje prvog dijela zadatka:
- Metak će ubrzati ako je pritisak unutar cilindra veći od vanjskog pritiska zraka. Dakle, maksimalna energija će se prenijeti na metak ako je cilindar dovoljno dugačak da konačni pritisak unutar cilindra bude  $P_{\text{atm}}$ .

Energija idealnog dvoatomskog gasa je data sa:

$$C_v nRT = C_v PV \quad (1 \text{ b})$$

po zakonu idealnog gasa. Maksimalna energija se isporučuje metku kada je konačni pritisak atmosferski, pa je rad koji gas obavi na metku:

$$C_v(P_0V_0 - P_{atm}V_f) \quad (1 \text{ b})$$

Ali metak se kreće “protiv” vazduha, tako da je ukupna energija data metku:

$$E_{max} = C_v(P_0V_0 - P_{atm}V_f) - P_{atm}(V_f - V_0) \quad (2 \text{ b})$$

S obzirom da nema razmjene energije sa okolinom, zaključujemo da se radi o adijabatskom procesu. U adijabatskoj ekspanziji  $PV^\gamma = \text{const}$ , onda:

$$V_f = V_0 \left( \frac{P_0}{P_{atm}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (1 \text{ b})$$

gdje je  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ . Kada sve ovo iskombinujemo, dobijemo:

$$E_{max} = \frac{5}{2}P_0V_0 - \frac{7}{2}P_{atm}V_f + P_{atm}V_0$$

$$E_{max} = \left( \frac{5}{2}P_0 + P_{atm} - \frac{7}{2}P_{atm}^{\frac{2}{7}}P_0^{\frac{5}{7}} \right) V_0 \quad (2 \text{ b})$$

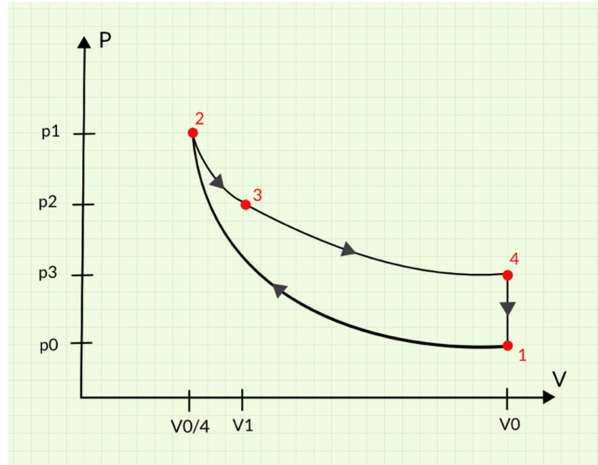
ii. Dužina cilindrične cijevi je:

$$L = \frac{V_f}{A} = \frac{V_0}{A} \left( \frac{P_0}{P_{atm}} \right)^{\frac{5}{7}} \quad (2 \text{ b})$$

b) Rješenje drugog dijela zadatka:

- i. Proces A – Izotermni proces
- Proces B – Adijabatski proces
- Proces C – Izotermni proces
- Proces D – Izohorni proces (2 b)

P-V dijagram



(5 b)

- ii. Tokom izoternog procesa A (dešava se kompresija sa zapremine  $V_0$  na zapreminu  $V_1=V_0/4$ ) rad koji se izvrši nad zrakom je:

$$W = nRT \log \frac{V_0}{V_1}$$

što daje:

$$W = 2 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \cdot 298 \text{ K} \cdot \log 4 = 6870 \text{ J} \quad (3 \text{ b})$$

- iii. Tokom procesa B,  $PV^\gamma$  je očuvano jer se radi o adijabatskom procesu. Kombinujući ovo sa jednačinom idealnog gasa, dobijemo da je  $TV^{\gamma-1}$  očuvano. Odavdje izvlačimo da je temperatura procesa B:

$$T_2 = T_0 \left( \frac{V_1}{V_0} \right)^{\gamma-1} \quad (1 \text{ b})$$

gdje je  $V_1$  zapremina koja ostane nakon procesa A. Koristit ćemo jednačinu stanja idealnog gasa da izračunamo početnu zapreminu:

$$V_0 = \frac{nR_0}{P_0} = \frac{2 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \cdot 298 \text{ K}}{1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 0,0490 \text{ m}^3 \quad (2 \text{ b})$$

Što se tiče ostale dvije zapremine,  $V$  je već data ( $V = 15,0 \text{ L} = 0,0150 \text{ m}^3$ ), a  $V_1$  vrlo lako možemo izračunati:

$$V_1 = \frac{1}{4} V_0 = 0,0123 \text{ m}^3 \quad (2 \text{ b})$$

Tada:

$$T_2 = 298 \text{ K} \left( \frac{0,0123}{0,0150} \right)^{\frac{2}{5}} = 275 \text{ K} \quad (1 \text{ b})$$

Kroz cijeli zadatak je korišteno:  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$  i  $1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

XXVI Federalno takmičenje iz fizike za učenike srednjih škola

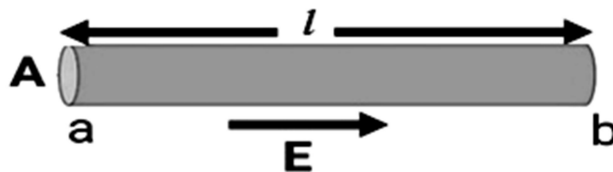
Grupa B - Elektromagnetizam, oscilacije i talasi

Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, 23. april 2022.

1. Naći potencijal naelektrisane usamljene provodne kugle postavljene u vakuum, ako u tačkama koje se nalaze na udaljenostima od  $r_1=5$  cm i  $r_2=10$  cm od njene površine odgovarajući potencijali iznose  $\varphi_1=300$  V i  $\varphi_2=210$  V.  $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m. (15 b)

2. Otpornici su elementi koji spadaju u red pasivnih komponenti električnog kola i skoro su neizostavan dio svake šeme. Zbog toga ih je potrebno dobro poznavati kako bismo shvatili njihovo ponašanje i upotrebu. Ovaj zadatak se sastoji od tri međusobno nepovezana djela u kojima se ispituje ponašanje otpornika u kolima.

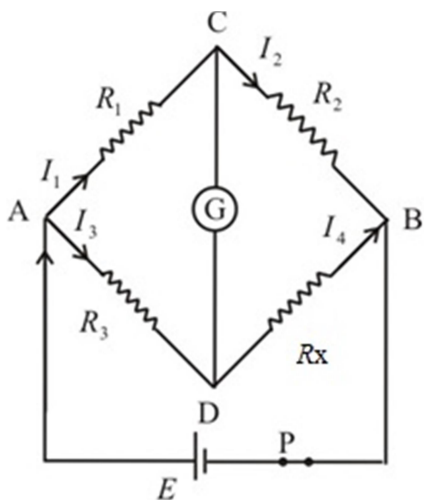
a) Na slici 1 je prikazana žica površine poprečnog presjeka  $A$ . Koristeći izraz  $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ , gdje je  $J$  gustoća struje,  $\sigma$  provodljivost žice i  $E$  električno polje, izvesti izraz za otpor  $R$  u zavisnosti od  $l$ ,  $A$  i  $\rho$  gdje je  $\rho$  otpornost žice. (5 b)



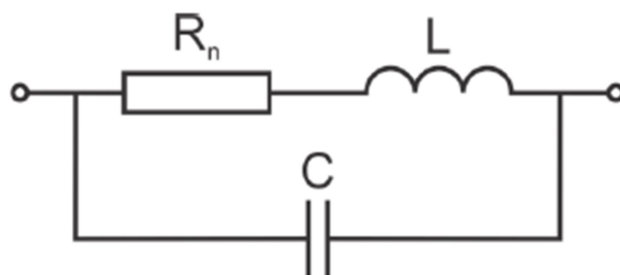
Slika 1

b) Vitstonov most (eng. Wheatstone bridge) predstavlja metodu kojom je moguće izračunati vrijednost nekog otpora  $R_x$  uz pomoć elemenata kola. Ti elementi su: izvor napona, tri otpornika nekih vrijednosti i galvanometar. Šema Vitstonovog mosta je prikazana na slici 2. Ako je postignuta ravnoteža mosta, tj. kroz galvanometar ne teče struja, izvor daje napon 100 V i ako je  $R_1=1$  k $\Omega$ ,  $R_2=2$  k $\Omega$  i  $R_3=3$  k $\Omega$ , izračunati  $R_x$ . (10 b)

c) Mjerni otpornici se koriste u kolima za mjerenje vrijednosti električnih komponenti, što je veoma važan posao u bilo kakvom radu kada se mora upravljati strujama i naponima. Kod mjernog otpornika, kao i kod svakog drugog realnog otpornika, postoji tzv. parazitni kapacitet i parazitni induktivitet koji može uticati na mjerenje pa i na sam pravilan rad nekog električnog kola. Nadomjesna šema mjernog otpornika je prikazan na slici 3. Fazni pomak ovakvog otpornika iako mali, postoji. Dat je kao  $\phi \approx \text{tg}(\phi) = \omega\tau$ , gdje je  $\tau$  vremenska konstanta otpornika. Ukoliko je  $\omega^2 LC \ll 1$ , pronaći izraz za  $\tau$ . (10 b)



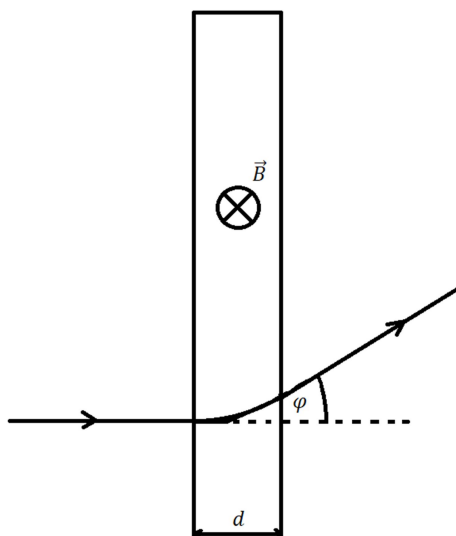
Slika 2



Slika 3

3. Razmotrimo eksperiment u kojem je potrebno dovesti snop protona na detektor. Potrebno je da taj snop pada okomito na ravan detektora, zbog čega se snop protona mora zakrenuti od početnog pravca za ugao  $\varphi = 30^\circ$ .

a) Neka su protoni ubrzani naponom od  $V = 500$  kV, te tokom svog kretanja prolaze kroz područje u kojem je uključeno homogeno magnetno polje čija je jačina indukcije  $B = 0,51$  T. Kolika mora biti dužina područja  $d$  u kojem se nalazi magnetno polje (Slika 4), ako upravo sa ovim magnetnim poljem želimo zakrenuti snop protona? (15 b)



Slika 4

Snop protona je sa gornjom eksperimentalnom postavkom uspješno doveden do detektora. Međutim, uslovi ovog eksperimenta su takvi da se u laboratoriji nalazi dosta pozitrona koji se kreću haotično (vektori brzine su im potpuno nasumično orijentisani).

Pozitron je tzv. “antičestica” od elektrona. Ima istu masu kao elektron, ali im je naboj suprotan. Dakle, naboj im je  $+e$ , a masa  $m_e$ .

Da pozitroni ne bi dolazili do detektora i stvarali grešku u našim mjerenjima, potrebno je uključiti magnetno polje u određenom području prije detektora. To magnetno polje mora zakretati putanje pozitrona tako da ni jedan pozitron ne prođe kroz magnetno polje, već svi budu vraćeni.

b) Kolika mora biti dužina područja  $d'$  u kojem se nalazi magnetno polje čija je jačina indukcije  $B = 0,51 \text{ T}$ , ako ono ne dozvoljava pozitronima da pređu kroz to područje. Magnetno polje je homogeno i usmjereno kao i u dijelu pod a) (Slika 4). Pozitroni se kreću haotično na onoj strani magnetnog polja na kojoj nije detektor, tako da je maksimalna brzinu koju pozitron može imati  $v = 200\,000\,000 \text{ m/s}$ . **(12 b)**

*Ukoliko niste uradili a) i b), za dijelove c) i d) smatrati  $d$  i  $d'$  poznatim, te objasniti u kojim slučajevima se hoće spriječiti dolazak pozitrona (elektrona) do detektora.*

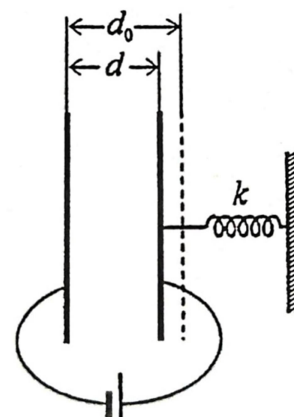
c) Da li će eksperimentalna postavka koja je opisana u dijelu a) spriječiti dolazak pozitrona do detektora? **(1 b)**

d) Da li će eksperimentalna postavka koja je opisana u dijelu a) spriječiti dolazak elektrona do detektora? Elektroni se kreću haotično i maksimalna brzinu koju elektron može imati je  $v = 200\,000\,000 \text{ m/s}$ . **(2 b)**

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}, e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}, m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

4. Jedna ploča ravnog kondenzatora je učvršćena, a druga koja ima masu  $m$ , vezana je za oprugu koeficijenta elastičnosti  $k$  kao na slici 5. Rastojanje između ploča kondenzatora, pri nedeformisanoj opruzi, je  $d_0$ . Kada se kondenzator veže za izvor elektromotorne sile, ravnotežno rastojanje između njegovih ploča se smanji na  $d = \frac{4d_0}{5}$ . Odrediti period malih oscilacija ploče. **(30 b)**

**Napomena:** Za malo  $x$  ( $x \ll 1$ ) i realan broj  $n$  možete koristiti aproksimaciju  $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ .



Slika 5

**XXVI Federalno takmičenje iz fizike za učenike srednjih škola**

**Grupa B - Elektromagnetizam, oscilacije i talasi**

Prirodno-matematički fakultet Sarajevo, 23. april 2022.

1. Naći potencijal naelektrisane usamljene provodne kugle postavljene u vakuum, ako u tačkama koje se nalaze na udaljenostima od  $r_1=5$  cm i  $r_2=10$  cm od njene površine odgovarajući potencijali iznose  $\varphi_1=300$  V i  $\varphi_2=210$  V.  $\varepsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m. **(15 b)**

**RJEŠENJE:**

$$r_1 = 5 \text{ cm}$$

$$r_2 = 10 \text{ cm}$$

$$\varphi_1 = 300 \text{ V}$$

$$\varphi_2 = 210 \text{ V}$$

$$\varphi = ?$$

Potencijal provodne kugle se računa kao:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R} \quad (*), \quad (3 \text{ b})$$

gdje je  $q$  njen naboj, a  $R$  njen poluprečnik.

Prema uslovima zadatka vrijedi:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{(R+r_1)} \quad (**)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{(R+r_2)} \quad (***) \quad (4 \text{ b})$$

Izjednačavanjem desnih strana jednačina (\*\*) i (\*\*\*) dobije se:

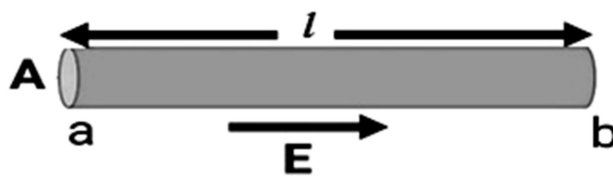
$$R = \frac{\varphi_2 r_2 - \varphi_1 r_1}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (****). \quad (4 \text{ b})$$

Uvrštavanjem (\*\*\*\*) u jednačinu (\*) dobija se:

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \frac{r_2 - r_1}{\varphi_2 \cdot r_2 - \varphi_1 \cdot r_1} = 525 \text{ V}. \quad (4 \text{ b})$$

2. Otpornici su elementi koji spadaju u red pasivnih komponenti električnog kola i skoro su neizostavan dio svake šeme. Zbog toga ih je potrebno dobro poznavati kako bismo shvatili njihovo ponašanje i upotrebu. Ovaj zadatak se sastoji od tri međusobno nepovezana djela u kojima se ispituje ponašanje otpornika u kolima.

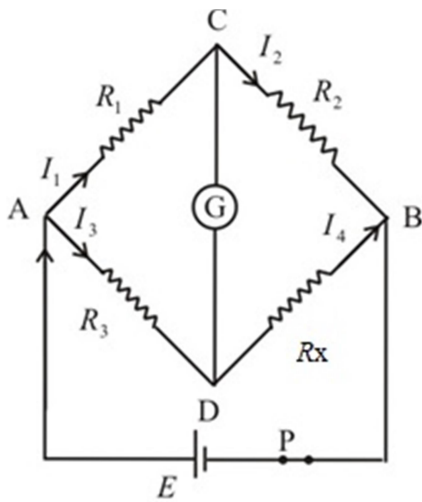
c) Na **slici 1** je prikazana žica površine poprečnog presjeka  $A$ . Koristeći izraz  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , gdje je  $J$  gustoća struje,  $\sigma$  provodljivost žice i  $E$  električno polje, izvesti izraz za otpor  $R$  u zavisnosti od  $l$ ,  $A$  i  $\rho$  gdje je  $\rho$  otpornost žice. (5 b)



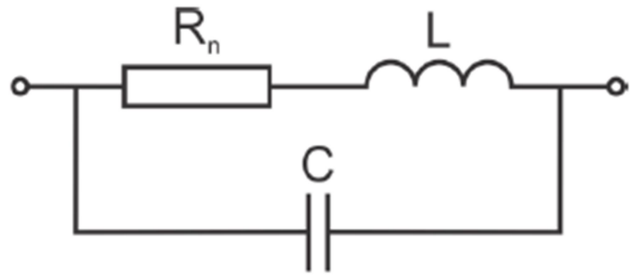
Slika 1

d) Vitstonov most (eng. Wheatstone bridge) predstavlja metodu kojom je moguće izračunati vrijednost nekog otpora  $R_x$  uz pomoć elemenata kola. Ti elementi su: izvor napona, tri otpornika nekih vrijednosti i galvanometar. Šema Vitstonovog mosta je prikazana na **slici 2**. Ako je postignuta ravnoteža mosta, tj. kroz galvanometar ne teče struja, izvor napona daje 100 V i ako je  $R_1=1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2=2 \text{ k}\Omega$  i  $R_3=3 \text{ k}\Omega$ , izračunati  $R_x$ . (10 b)

c) Mjerni otpornici se koriste u kolima za mjerenje vrijednosti električnih komponenti, što je veoma važan posao u bilo kakvom radu kada se mora upravljati strujama i naponima. Kod mjernog otpornika, kao i kod svakog drugog realnog otpornika, postoji tzv. parazitni kapacitet i parazitni induktivitet koji može uticati na mjerenje pa i na sam pravilan rad nekog električnog kola. Nadomjesna šema mjernog otpornika je prikazan na **slici 3**. Fazni pomak ovakvog otpornika iako mali, postoji. Dat je kao  $\phi \approx \text{tg}(\phi) = \omega\tau$ , gdje je  $\tau$  vremenska konstanta otpornika. Ukoliko je  $\omega^2 LC \ll 1$ , pronaći izraz za  $\tau$ . (10 b).



Slika 2



Slika 3

**RJEŠENJE:**

a) Gustoća struje data je kao  $J = \frac{I}{A}$ , gdje je  $I$  struja koja teče kroz žicu, a  $A$  površina poprečnog presjeka. Jačina električnog polja se dobija kao  $E = \frac{\Delta V}{\Delta l}$ , gdje je  $\Delta V = U$ , razlika potencijala između  $a$  i  $b$ , a  $l$  udaljenost između njih. (2 b)

Ako ove dvije relacije uvrstimo u dati izraz dobija se:

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{U}{l}$$

$$\frac{l}{A} = \sigma \frac{U}{I} \quad (2 \text{ b})$$

$$R = \frac{l}{\sigma A}$$

Provodljivost žice je recipročna vrijednost otpornosti žice, pa se dobija:

$$R = \frac{\rho l}{A} \quad (1 \text{ b})$$

b) U čvoru A dolazi do grananja struje. Ako struja ne teče kroz galvanometar, za tačke C i D vrijede uslovi ravnoteže:

$$I_1 = I_2 \text{ i } I_3 = I_4. \quad (2 \text{ b}) \quad (*)$$

Primijeni se II Kirhofovo pravilo na konturu ADC:

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0,$$

pa je

$$R_1 I_1 = R_3 I_3. \quad (2 \text{ b}) \quad (**)$$

Takođe se primijeni II Kirhofovo pravilo za konturu DBC:

$$R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0,$$

$$R_2 I_2 = R_4 I_4. \quad (2 \text{ b}) \quad (***)$$

Dijeljenjem (\*\*) sa (\*\*\*) i uvažavajući jednačine (\*), dobije se:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

ili

$$R_1 R_4 = R_2 R_3. \quad (2 \text{ b}) \quad (***)$$

Iz formule (\*\*\*\*) slijedi da se množenjem otpora u paralelnim granama mosta dobije jednak rezultat.

Nepoznati otpor se izračunava kao:

$$R_x = R_3 \frac{R_2}{R_1}.$$
$$R_x = 6 \text{ k}\Omega \quad (2 \text{ b})$$

c) Fazni pomak se računa kao odnos imaginarnog i realnog dijela ukupne impedanse. Za mjerni otpornik ukupna impedansa će biti:

$$\bar{Z} = \left( \frac{\frac{R_n + j\omega L}{j\omega C}}{R_n + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \right) \quad (5 \text{ b})$$
$$\bar{Z} = R_n \cdot \frac{1 + j\omega \left[ \frac{L}{R_n} (1 - \omega^2 LC) - R_n C \right]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_n^2 C^2}$$

Fazni pomak je onda:

$$\phi \approx \operatorname{tg}(\phi) = \frac{\operatorname{Im}\{\bar{Z}\}}{\operatorname{Re}\{\bar{Z}\}} = \omega\tau$$

$$\phi \approx \omega \left[ \frac{L}{R_n} (1 - \omega^2 LC) - R_n C \right]$$

Dobije se da je vremenska konstanta otpornika:

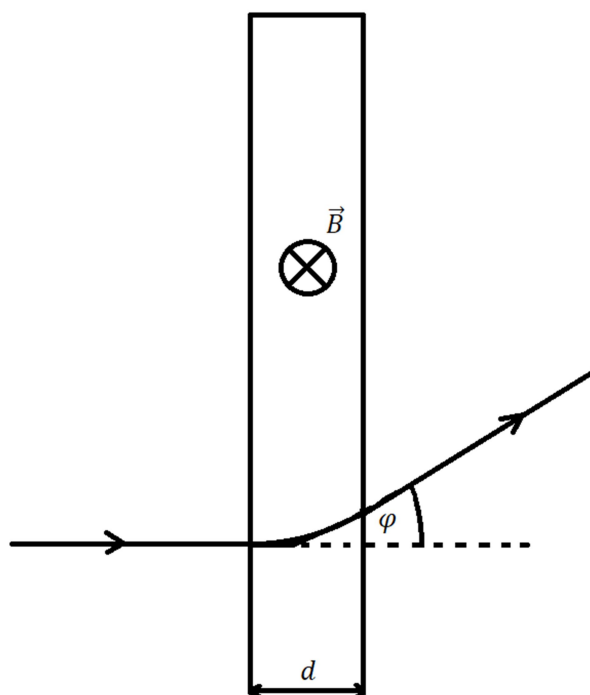
$$\tau \approx \left[ \frac{L}{R_n} (1 - \omega^2 LC) - R_n C \right] \quad (\mathbf{4\ b})$$

Kako je  $\omega^2 LC \ll 1$ , dobije se:

$$\tau = \frac{L}{R_n} - R_n C \quad (\mathbf{1\ b})$$

3. Razmotrimo eksperiment u kojem je potrebno dovesti snop protona na detektor. Potrebno je da taj snop pada okomito na ravan detektora, zbog čega se snop protona mora zakrenuti od početnog pravca za ugao  $\varphi = 30^\circ$ .

e) Neka su protoni ubrzani naponom od  $V = 500$  kV, te tokom svog kretanja prolaze kroz područje u kojem je uključeno homogeno magnetno polje čija je jačina indukcije  $B = 0,51$  T. Kolika mora biti dužina područja  $d$  u kojem se nalazi magnetno polje (Slika 1), ako upravo sa ovim magnetnim poljem želimo zakrenuti snop protona? (15 b)



Slika 4

Snop protona je sa gornjom eksperimentalnom postavkom uspješno doveden do detektora. Međutim, uslovi ovog eksperimenta su takvi da se u laboratoriji nalazi dosta pozitrona koji se kreću haotično (vektori brzine su im potpuno nasumično orijentisani).

Pozitron je tzv. “antičestica” od elektrona. Ima istu masu kao elektron, ali im je naboj suprotan. Dakle, naboj im je  $+e$ , a masa  $m_e$ .

Da pozitroni ne bi dolazili do detektora i stvarali grešku u našim mjerenjima, potrebno je uključiti magnetno polje u određenom području prije detektora. To magnetno polje mora zakretati putanje pozitrona tako da ni jedan pozitron ne prođe kroz magnetno polje, već svi budu vraćeni.

f) Kolika mora biti dužina područja  $d'$  u kojem se nalazi magnetno polje čija je jačina indukcije  $B = 0,51 \text{ T}$ , ako ono ne dozvoljava pozitronima da pređu kroz to područje. Magnetno polje je homogeno i usmjereno kao i u dijelu pod a) (Slika 4). Pozitroni se kreću haotično na onoj strani magnetnog polja na kojoj nije detektor, tako da je maksimalna brzina koju pozitron može imati  $v = 200\,000\,000 \text{ m/s}$ . **(12 b)**

*Ukoliko niste uradili a) i b), za dijelove c) i d) smatrati  $d$  i  $d'$  poznatim, te objasniti u kojim slučajevima se hoće spriječiti dolazak pozitrona (elektrona) do detektora.*

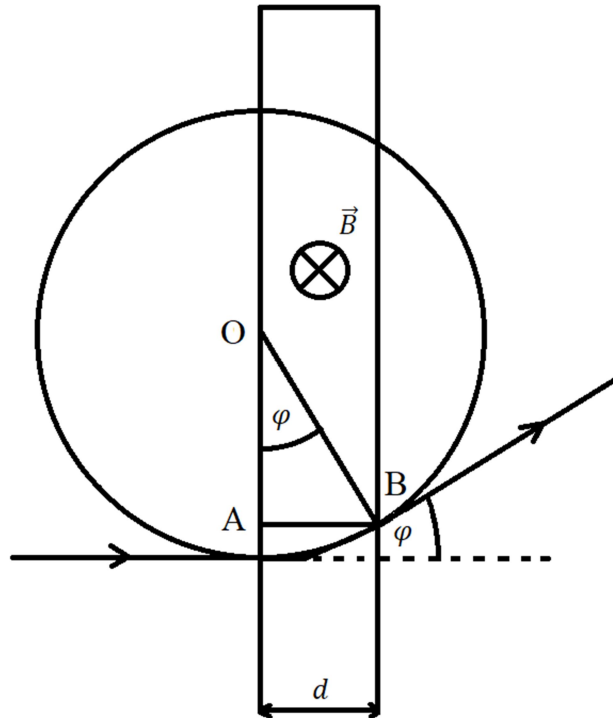
g) Da li će eksperimentalna postavka koja je opisana u dijelu a) spriječiti dolazak pozitrona do detektora? **(1 b)**

h) Da li će eksperimentalna postavka koja je opisana u dijelu a) spriječiti dolazak elektrona do detektora? Elektroni se kreću haotično i maksimalna brzina koju elektron može imati je  $v = 200\,000\,000 \text{ m/s}$ . **(2 b)**

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}, e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}, m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

### RJEŠENJE:

a) Proton će se u području sa magnetnim poljem kretati po luku na kružnici čiji je centar u tački O (Slika 4).



Slika 4

Posmatrajući ugao  $\sphericalangle AOB$  vidimo da su mu katete okomite sa katetama ugla  $\varphi$  (nastavak putanje snopa u tački B mora biti tangenta na datu kružnicu), zbog čega vrijedi:

$$\sphericalangle AOB = \varphi = 30^\circ \quad (4 \text{ b}) \quad (1)$$

Primjetimo da je trougao  $\Delta OAB$  pravougli trougao sa uglom od  $\varphi = 30^\circ$ . Za takve trouglove je poznato da je odnos naspramne katete ugla  $\varphi$  i hipotenuze jednak jednoj polovini, dakle:

$$\frac{d}{R} = 0,5 \Rightarrow d = 0,5 \times R \quad (3 \text{ b}) \quad (2)$$

Radijus te kružnice je moguće odrediti iz uslova da Lorentzova sila ima ulogu centripetalne:

$$qvB = \frac{m_p v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m_p v}{qB} \quad (3 \text{ b}) \quad (3)$$

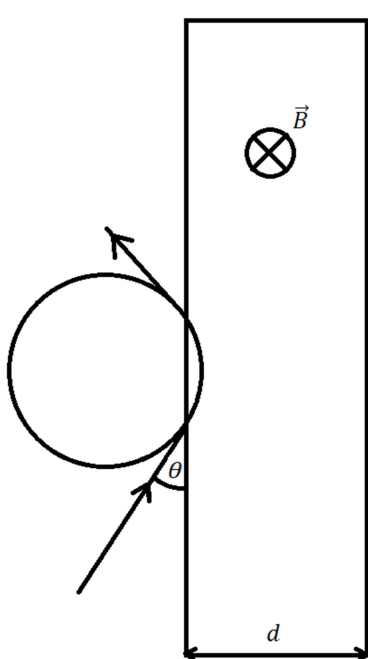
Očigledno nam je potrebno izraziti i brzinu protona preko poznatih veličina koristeći uslov da je protonski snop ubrzan naponom  $V$ :

$$qV = \frac{m_p v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m_p}} \quad (2 \text{ b}) \quad (4)$$

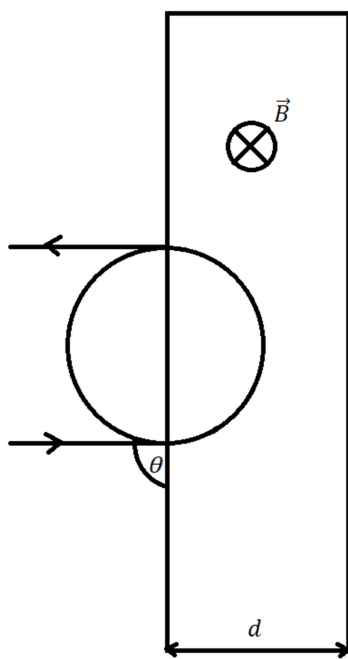
Uvrštavajući (4) u (3), te zatim (3) u (2), dobije se:

$$d = 0,5 \times \frac{m_p}{qB} \times \sqrt{\frac{2qV}{m_p}} = 0,5 \times \frac{1}{B} \times \sqrt{\frac{2m_p V}{q}} \approx 10 \text{ cm} \quad (3 \text{ b}) \quad (5)$$

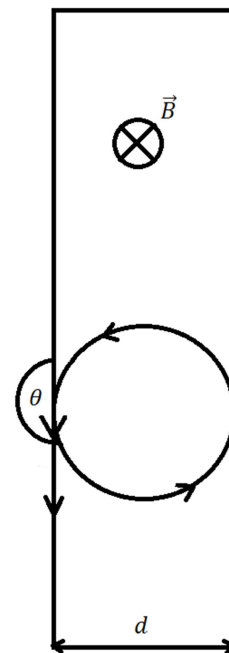
b) Posmatrajmo nekoliko slučajeva kretanja pozitrona u magnetnom polju. (Slika 5a, 5b, 5c)



Slika 5a



Slika 5b



Slika 5c

Primjeti se da za veće uglove  $\theta$ , koji predstavlja ugao između početnog pravca kretanja pozitrona i granice područja sa magnetnim poljem, pozitroni prolaze dublje u područje sa magnetnim poljem.

Zaključujemo da je kritični slučaj onaj u kome pozitron sa maksimalnom mogućom brzinom  $v = 200\,000\,000 \text{ m/s}$  ulazi u područje s magnetnim poljem pod uglom  $\theta = 180^\circ$ . Dakle, ako takvi pozitroni ne prođu kroz područje sa magnetnim poljem, neće to moći ni drugi. (6 b)

Kao što se vidi iz Slike 5c, to nam daje uslov da je minimalna dužina područja sa magnetnim poljem data kao:

$$d' = 2R = 2 \frac{m_e v}{qB} = 0,45 \text{ cm} \quad (6 \text{ b})$$

Uvršten je već dobijeni izraz za R, odnosno jednačina (3).

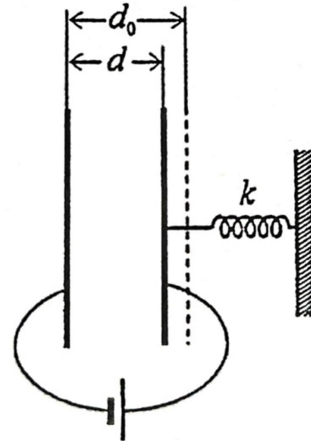
c) Dobili smo da je  $10 \text{ cm} = d > d' = 0,45 \text{ cm}$ . Pozitroni sigurno neće proći kroz magnetno polje u postavci u dijelu pod a), jer ne mogu proći ni kroz magnetno polje mnogo manje dužine, što je pokazano u dijelu pod b). **(1 b)**

d) Za elektrone je potpuno analogna situacija. Razlika je što će smjer Lorentzove sile bit suprotan od onog koji je bio u slučaju pozitrona, te će se pri razmatranjima u dijelu pod b) dostići kritični slučaj za upadni ugao  $\theta = 0^0$ .

Međutim, radijus kružne putanje za elektrone će biti jednak radijusu kružne putanje za pozitrone, pa su i potrebne dužine područja sa magnetnim poljem jednake.

Dakle, ni elektroni neće moći proći kroz područje sa magnetnim poljem. **(2 b)**

4. Jedna ploča ravnog kondenzatora je učvršćena, a druga koja ima masu  $m$ , vezana je za oprugu koeficijenta elastičnosti  $k$ . Rastojanje između ploča kondenzatora, pri nedeformisanoj opruzi, je  $d_0$ . Kada se kondenzator veže za izvor elektromotorne sile, ravnotežno rastojanje između njegovih ploča se smanji na  $d = \frac{4d_0}{5}$ . Odrediti period malih oscilacija ploče. (30 b)



**Napomena:** Za malo  $x$  ( $x \ll 1$ ) i realan broj  $n$  možete koristiti aproksimaciju  $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ .

**RJEŠENJE:**

Ukupno električno polje između ploča kondenzatora jednako je  $E_0 = \frac{U}{d}$ , gdje je  $U$  napon izvora. pa je električno polje koje stvara samo jedna ploča kondenzatora duplo manje  $E = \frac{U}{2d}$  (2 b). Električna sila kojom jedna ploča kondenzatora djeluje na drugu jednaka je  $F_e = \frac{QU}{2d}$  (2 b) gdje je  $Q$  naelektrisanje kondenzatora. Ako naelektrisanje kondenzatora izrazimo preko formule  $Q = CU = \epsilon_0 \frac{S}{d} U$  (1 b), gdje je  $C$  kapacitet kondenzatora, a  $S$  površina ploče kondenzatora, za silu  $F_e$  dobijemo  $F_e = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2}$  (1 b).

Prilikom vezivanja kondenzatora na izvor elektromotorne sile, opruga se istegnula za  $l = d_0 - d = \frac{d_0}{5} = \frac{d}{4}$  (1 b), pa iz uslova ravnoteže električne sile  $F_e$  i sile opruge  $F_o = kl$  imamo

$$\frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2} = kl = \frac{1}{4} kd. \quad (4 \text{ b})$$

Kada se ploča pomjeri iz ravnotežnog položaja za malo rastojanje  $x$ , na nju će sila opruge  $F_o' = k(l + x)$  (1 b) djelovati u smjeru povratka ploče u ravnotežni položaj, dok će električna sila  $F_e' = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2(d-x)^2}$  (1 b) djelovati u smjeru suprotnom od ravnotežnog položaja. Intenzitet rezultantne sile na ploču u smjeru povratka ploče u ravnotežni položaj jednak je

$$F = F_o' - F_e' = k(l + x) - \frac{\epsilon_0 S U^2}{2(d-x)^2},$$

$$F = k(l + x) - \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2} \left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-2}. \quad (3 \text{ b})$$

Kako je  $\frac{x}{d} \ll 1$ , možemo iskoristiti aproksimaciju  $\left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-2} \approx 1 + 2\frac{x}{d}$  (2 b), pa izraz za intenzitet rezultantne sile  $F$  postaje

$$F = kl + kx - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2} - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{d^3} x, \quad (\mathbf{3\ b})$$

$$F = \left( k - \frac{\varepsilon_0 S U^2}{d^3} \right) x, \quad (\mathbf{2\ b})$$

gdje smo u drugom redu iskoristili iznad dobijeni uslov za ravnotežno stanje. Također iz uslova za ravnotežno stanje imamo  $\frac{\varepsilon_0 S U^2}{d^3} = \frac{1}{2} k$  (**1 b**), odakle dobijamo

$$F = \frac{1}{2} kx. \quad (\mathbf{1\ b})$$

Ako izraz za resultantnu silu uporedimo sa izrazom za silu običnog harmonijskog oscilatora, vidjećemo da se sistem ponaša kao harmonijski oscilator efektivne konstante elastičnosti  $k_{ef} = \frac{1}{2} k$  (**2 b**). Sada period malih oscilacija ploče možemo dobiti iz poznate formule za period harmonijskog oscilatora

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{ef}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}. \quad (\mathbf{3\ b})$$

## Grupa C – optika, atomska i nuklearna fizika

1. Zraka svjetlosti pada na donju stranu staklene prizme čiji je kut pri vrhu  $\theta=30^\circ$ , a indeks loma  $n=1,6$ . Prizma je jednom bočnom stranom naslonjena na ravno zrcalo, kao što je prikazano na slici.

- Ako je upadni kut zrake svjetlosti na donju površinu prizme  $\alpha=45^\circ$ , pod kojim kutom on napušta prizmu?
- Kolika je najmanja vrijednost upadnog kuta  $\alpha$  pri kome će svjetlosni zraci još izlaziti iz prizme?

(25 bodova)



2. U prostoriji u kojoj boravi veći broj ljudi može postati izuzetno toplo. Razlog tome je što čovjek zagrijava prostoriju emitujući toplotu, u najopštijem slučaju isključivo u vidu zračenja. Razmotrimo pojednostavljeni model sferno-simetričnog čovjeka oblika kugle poluprečnika  $r$ , dok prostoriju možemo smatrati sferom poluprečnika  $R$ , pri čemu se njihovi centri poklapaju.

Dio A: Smatrati da čovjek i unutrašnji zidovi prostorije zrače kao apsolutno crna tijela, čije su temperature  $T_c$  i  $T_z$  respektivno.

- Odrediti izraz za snagu ukupnog zračenja koje čovjek emituje.
- Napisati izraz za snagu zračenja koje emituje mali djelić zida površine  $\Delta S$  koju može apsorbovati čovjek. Odrediti izraz za snagu ukupnog zračenja koje čovjek apsorbuje.
- Odrediti koliko je ljudi potrebno da bi zagrijali prostoriju do iste temperature kao grijalica korisne snage  $P_g = 1,32 \text{ kW}$ . Smatrati da se formule izvedene u prethodnim dijelovima zadatka mogu primijeniti na svakog čovjeka koji se nalazi u prostoriji. Koristiti sljedeće brojne vrijednosti:  $T_c = 36^\circ\text{C}$ ,  $T_z = 20^\circ\text{C}$ , te smatrati da je površina jednog čovjeka jednaka  $S = 1,9 \text{ m}^2$ .

Stefan–Boltzmannova konstanta iznosi  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

Dio B: Smatrati da čovjek i unutrašnji zidovi prostorije zrače kao siva tijela koeficijentata apsorpcije  $\alpha = 0,8$ .

- Napisati izraz za snagu zračenja koju čovjek preda zidovima prostorije u ovom slučaju.
- Koliku količinu toplote čovjek preda zidovima prostorije u toku vremena  $\Delta t = 3 \text{ h}$ ?

(25 bodova)

3. Atomi vodika se nalaze u pobuđenom stanju. Vraćanjem u osnovno stanje emituju se fotoni koji odgovaraju glavnoj liniji Lymanove serije. Sa tim fotonima se ozračava srebrna elektroda u vakuumskoj cijevi u kojoj je zakočno električno polje jačine  $15 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$ . Na koje maksimalno rastojanje od površine elektrode se mogu udaljiti elektroni? Crvena granica fotoefekta za srebro je 264 nm.

Date su konstante: Ridbergova konstanta  $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ , brzina svjetlosti u vakuumu  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , naboj elektrona  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , Plankova konstanta  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

(25 bodova)

4. Jedan od problema nakon eksplozije nuklearne bombe je pojava radioaktivnih padavina. Među najproblematičnijim nuklidima u takvim padavinama je stroncij-90, koji se raspada  $\beta$  raspadom sa periodom poluraspada od 28.8 godina.

a) Izračunati aktivnost uzorka  $^{90}\text{Sr}$  čiji je volumen 0.48  $\text{mm}^3$ . Gustina  $^{90}\text{Sr}$  je  $2.54 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Avogadrova konstanta iznosi  $6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ .

b) Nakon koliko vremena aktivnost uzorka opadne na 0.024% početne vrijednosti?

c) Ako su date mase atoma  $m(^{90}_{38}\text{Sr}) = 89.9077279u$ ,  
 $m(^{90}_{39}\text{Y}) = 89.90714174u$  i  $m(^{90}_{37}\text{Rb}) = 89.914798u$ ,

kojom vrstom  $\beta$  raspada se raspada  $^{90}_{38}\text{Sr}$ ?

d)  $^{90}\text{Sr}$  je, zbog svog načina raspada ( $\beta$ ) i relativno dugog vremena poluraspada, izuzetno opasan radionuklid. Zbog čega je ovaj radionuklid naročito opasan za ljude? (Odgovor se krije u dijelu periodnog sistema elemenata prikazanog na slici.)

39 19 <b>K</b> kalij	40 20 <b>Ca</b> kalcij	45 21 <b>Sc</b> skandij
85 37 <b>Rb</b> rubidij	88 38 <b>Sr</b> stroncij	89 39 <b>Y</b> itrij
133 55 <b>Cs</b> cezij	138 56 <b>Ba</b> barij	139 57 <b>La</b> lantan

(25 bodova)

1. Zraka svjetlosti pada na donju stranu staklene prizme čiji je kut pri vrhu  $\theta=30^\circ$ , a indeks loma  $n=1,6$ . Prizma je jednom bočnom stranom naslonjena na ravno zrcalo, kao što je prikazano na slici.

- c) Ako je upadni kut zrake svjetlosti na donju površinu prizme  $\alpha=45^\circ$ , pod kojim kutom on napušta prizmu?  
 d) Kolika je najmanja vrijednost upadnog kuta  $\alpha$  pri kome će svjetlosni zraci još izlaziti iz prizme?

(25 bodova)



Zadatak pripremio: Darko Kolenda

Rješenje:

- a) Problem možemo riješiti kombinirajući grafički i analitički pristup. Upadna zraka će se prelomiti ka normali jer imamo prijelaz iz optički rjeđe u optički gušću sredinu. Kut  $\beta$  možemo odrediti pomoću Snellovog zakona.

$$\sin \alpha = n \sin \beta \quad (1.5)$$

Kut  $\gamma$  možemo odrediti preko pravokutnog trokuta.

$$\gamma = 90^\circ - \beta \quad (1.5)$$

Prema zakonu odbijanja imamo:

$$\delta = \gamma \quad (1)$$

Nadalje, možemo pokazati da je:

$$\epsilon = 90^\circ - \beta - \theta = 90^\circ - (\beta + \theta) \quad (1.5)$$

Možemo pisati Snellov zakon i za drugi lom svjetlosti.

$$n \sin \epsilon = \sin \zeta \quad (1.5)$$

$$\rightarrow \zeta = \sin^{-1}(n \sin \epsilon) \quad (0.5)$$

$$= \sin^{-1}[n \sin(90^\circ - \beta - \theta)] \quad (0.5)$$

$$= \sin^{-1}[n \cos(\beta + \theta)] \quad (1)$$

Kombinirajući prethodni i prvi izraz dobivamo:

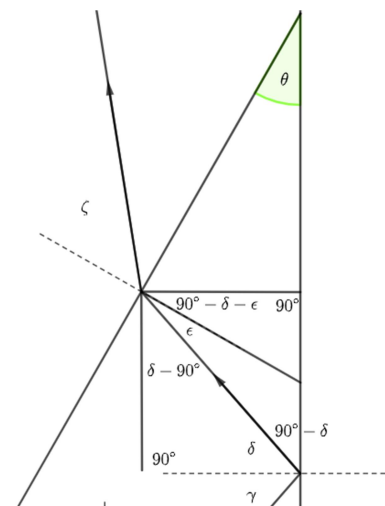
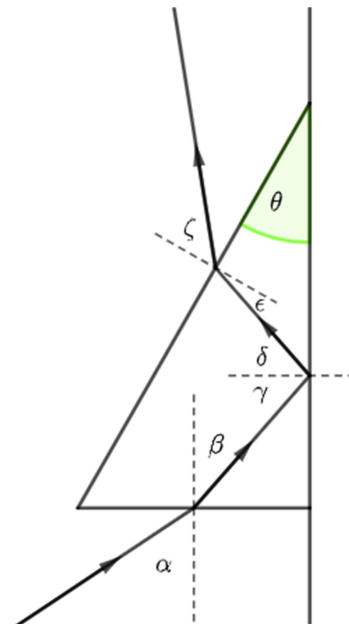
$$\zeta = \sin^{-1}\left[n \cos\left(\sin^{-1}\frac{\sin \alpha}{n} + \theta\right)\right]$$

$$\zeta = 62^\circ 48' \quad (1)$$

Skica - (2.5)

- b) Granična vrijednost drugog prijelomnog kuta za koji zrake svjetlosti napuštaju prizmu iznosi  $\zeta = 90^\circ$ . Za navedenu vrijednost prijelomnog kuta, kut  $\alpha = \alpha_{min}$ .

(4)



Iz konačno izraza iz dijela a) možemo izvući izraz za određivanje kuta  $\alpha$ .

$$\zeta = \sin^{-1}\left[n \cos\left(\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n} + \theta\right)\right]$$

$$\sin \zeta = n \cos\left(\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n} + \theta\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{n} \sin \zeta = \cos\left(\sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n} + \theta\right) \quad (1)$$

$$\cos^{-1} \frac{1}{n} \sin \zeta = \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n} + \theta \quad (1)$$

$$\cos^{-1} \frac{1}{n} \sin \zeta - \theta = \sin^{-1} \frac{\sin \alpha}{n} \quad (1)$$

$$\sin\left(\cos^{-1} \frac{1}{n} \sin \zeta - \theta\right) = \frac{\sin \alpha}{n} \quad (1)$$

$$n \sin\left(\cos^{-1} \frac{1}{n} \sin \zeta - \theta\right) = \sin \alpha \quad (1)$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left[n \sin\left(\cos^{-1} \frac{1}{n} \sin \zeta - \theta\right)\right] \quad (1)$$

Kada uvrstimo brojne vrijednosti, dobivamo:

$$\alpha = 35^{\circ}34' \quad (1.5)$$

2. U prostoriji u kojoj boravi veći broj ljudi može postati izuzetno toplo. Razlog tome je što čovjek zagrijava prostoriju emitujući toplotu, u najopštijem slučaju isključivo u vidu zračenja. Razmotrimo pojednostavljeni model sferno-simetričnog čovjeka oblika kugle poluprečnika  $r$ , dok prostoriju možemo smatrati sferom poluprečnika  $R$ , pri čemu se njihovi centri poklapaju.

Dio A: Smatrati da čovjek i unutrašnji zidovi prostorije zrače kao apsolutno crna tijela, čije su temperature  $T_c$  i  $T_z$  respektivno.

- f) Odrediti izraz za snagu ukupnog zračenja koje čovjek emituje.
- g) Napisati izraz za snagu zračenja koje emituje mali djelić zida površine  $\Delta S$  koju može apsorbovati čovjek. Odrediti izraz za snagu ukupnog zračenja koje čovjek apsorbuje.
- h) Odrediti koliko je ljudi potrebno da bi zagrijali prostoriju do iste temperature kao grijalica korisne snage  $P_g = 1,32 \text{ kW}$ . Smatrati da se formule izvedene u prethodnim dijelovima zadatka mogu primijeniti na svakog čovjeka koji se nalazi u prostoriji. Koristiti sljedeće brojne vrijednosti:  $T_c = 36^\circ\text{C}$ ,  $T_z = 20^\circ\text{C}$ , te smatrati da je površina jednog čovjeka jednaka  $S = 1,9 \text{ m}^2$ . Stefan-Boltzmannova konstanta iznosi  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

Dio B: Smatrati da čovjek i unutrašnji zidovi prostorije zrače kao siva tijela koeficijenata apsorpcije  $\alpha = 0,8$ .

- i) Napisati izraz za snagu zračenja koju čovjek preda zidovima prostorije u ovom slučaju.
- j) Koliku količinu toplote čovjek preda zidovima prostorije u toku vremena  $\Delta t = 3 \text{ h}$ ?

**(25 bodova)**

Zadatak pripremila: Nola Šegalo

Rješenje:

a)

S obzirom da čovjek zrači kao apsolutno crno tijelo, snaga zračenja koje emituje je data izrazom

$$P_{em} = \sigma T_c^4 S_c = \sigma T_c^4 4\pi r^2 \quad (4b)$$

b)

Razmotrimo najprije koliku snagu zračenja koje emituje djelić zida male površine  $\Delta S_z$  apsorbuje čovjek. Označimo tu snagu sa  $\Delta P_{pr}$ . Intenzitet zračenja tog djelića zida na rastojanju  $R$  je

$$\Delta I = \frac{\sigma T_z^4 \Delta S_z}{R^2 \pi} \quad (1b)$$

Na čovjeka će pasti svo zračenje koje bi palo na pločicu površine  $\pi r^2$  postavljenu normalno na pravac koji spaja djelić zida sa čovjekom. Prema tome,

$$\Delta P_z = \Delta I r^2 \pi = \frac{\sigma T_z^4 \Delta S_z r^2}{R^2} \quad (3b)$$

Ukupna snaga zračenja koju apsorbuje čovjek dobija se sabiranjem svih  $\Delta P_z$ , odakle se, imajući u vidu da je  $S_z = 4R^2\pi$ , dobija

$$P_{em} = \sigma T_z^4 4\pi r^2 \quad (4b)$$

c)

Snaga koju čovjek razmijeni sa okolinom jednaka je

$$P_r = P_{em} - P_{pr} = \sigma(T_c^4 - T_z^4)4\pi r^2 \quad (3b)$$

Da bi ljudi zagrijali prostoriju do iste temperature kao grijalica, potrebno je da snaga koju oni razmijene sa okolinom bude jednaka snazi grijalice, odnosno

$$P_g = NP_r \quad (2b)$$

gdje je N traženi broj ljudi. Odatle se dobija

$$N = \frac{P_g}{\sigma(T_c^4 - T_z^4)S} \approx 7 \quad (2b)$$

d)

Imajući u vidu da je intenzitet zračenja čovjeka

$$I_c = \alpha\sigma T_c^4 \quad (0.5b)$$

snaga koju izrači čovjek je onda

$$P_{c1} = \alpha\sigma T_c^4 S \quad (1b)$$

Intenzitet zračenja zidova prostorije, slično intenzitetu zračenja čovjeka je onda

$$I_z = \alpha\sigma T_z^4 \quad (0.5b)$$

što je ujedno i intenzitet zračenja zidova prostorije koje pada na čovjeka, što znači da čovjek apsorbuje zračenje sa zidova

$$P_{c2} = \alpha I_z S = \alpha^2 \sigma T_z^4 S \quad (1b)$$

Snaga koju čovjek preda zidovima je onda

$$P = P_{c1} - P_{c2} = \alpha\sigma(T_c^4 - \alpha T_z^4)S \quad (2b)$$

e)

Količina toplote koju čovjek preda zidovima u datom vremenu može se naći kao

$$\Delta Q = \alpha\sigma(T_c^4 - T_z^4)S\Delta t \approx 30\text{MJ} \quad \mathbf{(1b)}$$

3. Atomi vodika se nalaze u pobuđenom stanju. Vraćanjem u osnovno stanje emituju se fotoni koji odgovaraju glavnoj liniji Lymanove serije. Sa tim fotonima se ozračava srebrna elektroda u vakuumskoj cijevi u kojoj je zakočno električno polje jačine  $15 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$ . Na koje maksimalno rastojanje od površine elektrode se mogu udaljiti elektroni? Crvena granica fotoefekta za srebro je 264 nm.

Date su konstante: Ridbergova konstanta  $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ , brzina svjetlosti u vakuumu  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , naboj elektrona  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , Plankova konstanta  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

**(25 bodova)**

Zadatak pripremio: Emir Baručija

Rješenje:

$$E = 15 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 1500 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\lambda_0 = 264 \text{ nm} = 2.64 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Glavna linija Lymanove serije predstavlja prelaz sa  $m = 2$  na  $n = 1$ . Prema Rydbergovoj formuli imamo:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{1}{R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)}$$

$$\lambda = \frac{1}{1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)}$$

$$\lambda = 1.215 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 121.5 \text{ nm}$$

**(6 bodova)**

Poznata formula za fotoelektrični efekat glasi:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_i + E_k$$

**(3 boda)**

Maksimalno rastojanje dobijamo kada elektron svu kinetičku energiju potroši na savladavanje elektrostatičke sile, odnosno:

$$E_k = e \cdot \Delta\varphi$$

gdje je  $\Delta\varphi = E \cdot s$ , pri čemu je:

$E$  - jačina električnog polja

$s$  - pređeni put elektrona između potencijalne razlike  $\Delta\varphi$

**(7 bodova)**

Izlazni rad dobijamo preko crvene granice fotoefekta:

$$A_i = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$A_i = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2.64 \cdot 10^{-7} \text{ m}}$$

$$A_i = 7.53 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

**(4 boda)**

Konačno, formula za fotoefekat postaje:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_i + e \cdot E \cdot s$$

odakle dobijamo:

$$s = \frac{\frac{hc}{\lambda} - A_i}{e \cdot E}$$

$$s = \frac{\frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1.215 \cdot 10^{-7} \text{ m}} - 7.53 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1.6 \cdot 10^{-1} \text{ C} \cdot 1500 \frac{\text{V}}{\text{m}}}$$

$$s = 0.00368 \text{ m} = 3.68 \text{ mm}$$

**(5 bodova)**

4. Jedan od problema nakon eksplozije nuklearne bombe je pojava radioaktivnih padavina. Među najproblematičnijim nuklidima u takvim padavinama je stroncij-90, koji se raspada  $\beta$  raspadom sa periodom poluraspada od 28.8 godina.

a) Izračunati aktivnost uzorka  $^{90}\text{Sr}$  čiji je volumen 0.48  $\text{mm}^3$ . Gustina  $^{90}\text{Sr}$  je  $2.54 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Avogadrova konstanta iznosi  $6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$ .

b) Nakon koliko vremena aktivnost uzorka opadne na 0.024% početne vrijednosti?

c) Ako su date mase atoma  $m(^{90}_{38}\text{Sr}) = 89.9077279u$ ,  
 $m(^{90}_{39}\text{Y}) = 89.90714174u$  i  $m(^{90}_{37}\text{Rb}) = 89.914798u$ ,

kojom vrstom  $\beta$  raspada se raspada  $^{90}\text{Sr}$ ?

d)  $^{90}\text{Sr}$  je, zbog svog načina raspada ( $\beta$ ) i relativno dugog vremena poluraspada, izuzetno opasan radionuklid. Zbog čega je ovaj radionuklid naročito opasan za ljude? (Odgovor se krije u dijelu periodnog sistema elemenata prikazanog na slici.)

39 19 <b>K</b> kalij	40 20 <b>Ca</b> kalcij	45 21 <b>Sc</b> skandij
85 37 <b>Rb</b> rubidij	88 38 <b>Sr</b> stroncij	89 39 <b>Y</b> itrij
133 55 <b>Cs</b> cezij	138 56 <b>Ba</b> barij	139 57 <b>La</b> lantan

(25 bodova)

Zadatak pripremio: Mirsad Tunja

RJEŠENJE:

Postavka zadatka (1 bod)

a) Masa uzorka je

$$m = \rho V.$$

(1 bod)

Iz formula za količinu tvari  $n = \frac{m}{M}$  i  $n = \frac{N}{N_A}$  slijedi da je broj atoma u uzorku

$$N = \frac{m}{M} N_A.$$

(1 bod)

Konstanta radioaktivnosti je

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

**(1 bod)**

Aktivnost uzorka je

$$A = \lambda N,$$

**(1 bod)**

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{\rho V}{M} N_A.$$

Uvrštavajući numeričke vrijednosti,

$$A = 6.22 \text{ GBq.}$$

**(5 bodova)**

b) Aktivnost uzorka opada eksponencijalno:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

**(1 bod)**

Zanima nas nakon koliko vremena će aktivnost biti jednaka

$$A = \frac{0.024}{100} A_0.$$

**(1 bod)**

Slijedi da je traženo vrijeme

$$t = -T_{1/2} \frac{\ln 0.00024}{\ln 2},$$

$$t = 346.3 \text{ godina.}$$

**(3 boda)**

c) Da bi se raspad mogao desiti, masa jezgre roditelja mora biti veća od mase jezgre potomka.

U našem slučaju, date su mase atoma, a ne mase jezgri. Pošto je (u dobroj aproksimaciji) masa jezgre jednaka razlici mase atoma i odgovarajućeg broja elektrona, slijedi da je za ostvarivanje beta minus raspada potrebno da je masa atoma roditelja veća od mase atoma potomka. S druge

strane, kod beta plus raspada je potrebno da je masa atoma roditelja veća od mase atoma potomka za vrijednost veću od  $1.022 \frac{\text{MeV}}{c^2}$  (dvije mase mirovanja elektrona).

Pošto je masa datog izotopa Sr manja od mase datog izotopa Rb, odgovarajući beta raspad je nemoguć. Rb se nalazi lijevo u odnosu na Sr u periodnom sistemu elemenata, pa bi se pri takvom beta raspadu emitovao pozitron.

Pošto je masa datog izotopa Sr veća od mase datog izotopa Y, odgovarajući beta raspad je moguć. Y se nalazi desno u odnosu na Sr u periodnom sistemu elemenata, pa se pri takvom beta raspadu emituje elektron, odnosno u pitanju beta minus raspad. **(4 boda)**

d) Iz periodnog sistema je moguće primijetiti da se stroncij nalazi u istoj koloni kao kalcij.

Zbog hemijske sličnosti ova dva elementa, ljudsko tijelo na isti način apsorbira stroncij kao i kalcij te se zadržava u kostima. Ugrađen u kostima, radioaktivni Sr-90 može izazvati razna maligna oboljenja kostiju. **(6 bodova)**

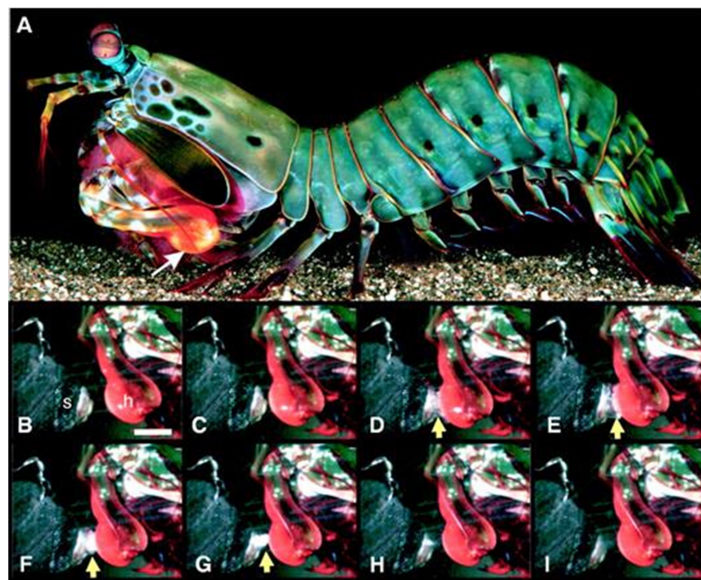
## GRUPA D – Cjelokupna fizika

### Zadatak 1: Škampe bogomoljke 10.0[bod]

Započeti ćemo zadatak s mišlju autora: „Svijet stvarnosti može, a i često jeste luđi od svijeta naučne fantastike. Naučna fantastika ipak mora biti dijelom razumna, dok stvarni svijet ima ovlast biti totalno nevjerovatan.“

U ovom zadatku ćemo se baviti fizikom jednog čudnovatog organizma: Škampe Bogomoljke (lat. *Odontodactylus scyllarus*) (Slika 1-A). Specifično, baviti ćemo se načinom lova datog organizma. Ove životinje, iako tipično ne narastu više od 18 (cm) dužine, su najeksplozivniji bokseri životinjskog svijeta. Naime, koristeći se kompleksnim biološkim mehanizmom opruga, poluga i brava, njihove prednje noge mogu razviti ubrzanje komparabilno s ubrzanjem koje bi metak doživio u puški. Njihovi udarci su toliko snažni da mogu razbiti školjke, kojima se uglavnom hrane, na komadiće. Međutim, to nije najimpresivnija stvar o njihovim udarcima. Toliko su brzi, da prilikom povlačenja šake okolna voda nema vremena da se vrati u mjesto, stvore zonu niskog pritiska - takozvani „kavitacijski mjehur“ (Slika 1). Zanimljivo je što tijekom raspada gas u mjehuru može dostići temperature istog reda veličine kao površina Sunca!

U nastavku zadatka ćemo se uglavnom baviti fizikom raspada kavitacijskog mjehura.



Slika 1: Na slici A je dat prikaz cijelog tijela Škampe bogomoljke. Šaka škampe (označena sa malim slovom h) udara školjku (označenu sa malim slovom s). Bijela crta na slici B je data kao skala i ima dužinu 1 (cm). Žuta strjelica na slikama D-F prikazuje fazu formiranja mjehurića. U slikama G-I je prikazan raspad mjehura.

### Dio A: Neke osnovne karakteristike raspada 4.5 [bod]

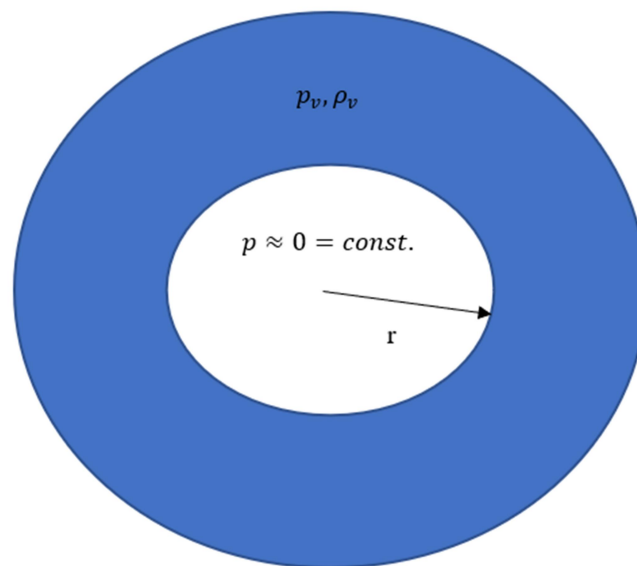
U ovom dijelu ćemo se baviti proračunom vremena raspada kavitacijskog mjehura, kako bismo mogli dati argument o prirodi termodinamičkog procesa u pitanju.

Radi jednostavnosti, možete smatrati da mjehur ima idealni sferni oblik, te da se njegov centar mase neće pomjerati tokom raspada. Okolna voda je nestišljiva i gustoća iznosi  $\rho_v = 1000 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ . Smatrajte da je u mjehuru vakuum i da je pritisak okolne vode  $p_v = 10^5 [Pa]$ , te da mjehur nema razmjene toplote s okolinom.

Uzimajući u obzir navedene pretpostavke, može se pokazati da će tokom kolapsa mjehura vrijediti:

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1 = \frac{3\rho_v}{2p_v} \dot{r}^2 \quad (1)$$

Gdje je  $r_0$  početni radijus mjehura,  $r$  je radijus u nekom trenutku  $t$ , a  $\dot{r}$  je vremenski izvod radijusa mjehura ( $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ). Izraz (1) nazivamo Rayleigh-Plesset jednačinom.



Slika 2: Prikaz mjehura

<b>A.1</b> Usljed kolapsa mjehura, doći će do kretanja kontaktne površine mjehur-voda. Odredite ukupnu energiju okolnog fluida kao funkciju od $r$ i $\dot{r}$ .
--

<b>1.5[bod]</b>
-----------------

<b>A.2</b> Koristeći se rezultatom iz A.1, izvedite Rayleigh-Plessett jednačinu.	<b>1.0[bod]</b>
--	-----------------

<b>A.3</b> Izračunajte vrijeme raspada $\tau$ mjehura početnog radijusa $r_0 = 2.7[mm]$ . Vjerovatno će vam biti potreban slijedeći integral: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x^3}-1}} \approx 0.747$	<b>0.7[bod]</b>
---	-----------------

U dijelu B zadatka ćemo razmatrati termodinamiku raspada mjehura. Ali, prvo nam je potrebno da odredimo prirodu termodinamičkog procesa: da li je proces adijabatski?

Karakteristično vrijeme prijenosa toplote kroz sistem  $\tau_C$  definišemo kao vrijeme koje je potrebno da se temperatura spoljašnje površine sfere izjednači sa temperaturom u centru. U gruboj aproksimaciji, može se uzeti da je vrijeme  $\tau_C$  samo ovisi o: gustoći gasa  $\rho_g$ , specifičnom toplotnom kapacitetu gasa  $c_g$ , toplotnoj vodljivosti membrane  $\kappa$  i početnom radijusu mjehura  $r_0$ .

<b>A.4</b> Dimenzionalnom analizom izvedite izraz za $\tau_C$ .	<b>1.0[bod]</b>
---	-----------------

<b>A.5</b> Neka je početni radijus isti kao u dijelu A3, gustoća gasa u mjehuru je $\rho_g = 0.0073 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ , specifični toplotni kapacitet $c_{vg} = 1.4 \left[ \frac{kJ}{kgK} \right]$ , a toplotna vodljivost $\kappa = 0.653 \left[ \frac{W}{K*m} \right]$ . Koristeći se prethodnim izrazima, dajte komentar o tome da li je razumno proces aproksimirati adijabatskim.	<b>0.3[bod]</b>
---	-----------------

### Dio B: Adijabatska kompresija 3.25 [bod]

U ovom dijelu zadatka ćemo proračunati unutrašnju temperaturu mjehura. Radi jednostavnosti, uzmite da će temperatura i pritisak gasa u mjehuru tokom kolapsa biti homogeni, te da će proces kompresije biti strogo adijabatski. U početnom trenutku, radijus mjehura je  $r_0 = 2.7[mm]$ , temperatura je  $T_0 = 20[^\circ C]$ , a pritisak je  $p_0 = 10^3[Pa]$ . Pritisak  $p_v$  i gustoća  $\rho_v$  okolne vode su isti kao u prethodnom dijelu zadatka. Gas unutar mjehura možete smatrati idealnim jednoatomnim.

<b>B.1</b> Odredite funkcionalne ovisnosti temperature i pritiska o radijusu mjehura $T(r)$ i $p(r)$ .	<b>1.0[bod]</b>
--	-----------------

Može se pokazati da će mjehur tokom kolapsa prvobitno doći do nekog minimalnog radijusa  $r_m$ , nakon čega će se desiti „odskok“ tj. nova faza širenja i kolapsa. Ovdje ćemo samo posmatrati prvu fazu kolapsa, jer se jedino ona može aproksimirati adijabatskim procesom.

Rayleigh-Plessett jednačina (izraz 1) se može napisati u pogodnijoj formi za ovaj dio zadatka kao:

$$\frac{1}{2}\rho_v \frac{d(r^3 \dot{r}^2)}{dr} = (p_{(r)} - p_v)r^2 \quad (4)$$

Iz izraza (4) se može dobiti slijedeća jednačina:

$$\dot{\omega}^2 = \frac{c_1}{\omega^3} \left( \frac{c_2(\omega^2 - 1)}{\omega^2} + c_3(1 - \omega^3) \right) \quad (5)$$

Gdje smo radi jednostavnosti zapisa uveli smjenu  $\omega = \frac{r}{r_0}$ ,  $c_1$  je konstanta koja ima dimenzije  $\left[\frac{1}{s^2}\right]$ , a  $c_2$  i  $c_3$  su bezdimenzionalne konstante.

U ovom dijelu zadatka vam može biti od koristi slijedeći identitet  $\int_A^B d(f(x)) = f(B) - f(A)$ , gdje je  $d(f(x)) = \frac{d(f(x))}{dx} \cdot dx$  diferencijal neke proizvoljne funkcije. Navedeni identitet je poznat kao Leibnitzovo pravilo i važi i za proizvod dvaju funkcija.

<b>B.2</b> Počevši od izraza (4), izvedite izraz (5), te odredite konstante $c_1$ , $c_2$ i $c_3$ .	<b>1.0[bod]</b>
---	-----------------

<b>B.3</b> Izračunajte aproksimativno minimalni radijus $r_m$ , te odgovarajuću temperaturu $T_m$ . Nemojte se brinuti ako dobijete dosta visoku temperaturu.	<b>1.25[bod]</b>
---	------------------

**Dio C: Mehanika udarca 2.25 [bod]**

Sila udarca šake Škampe bogomoljke je mjerena u zavisnosti vremena pomoću malog senzora čija je vremenska rezolucija reda ( $\mu s$ ). Grafik ovisnosti je prikazan na Slici 2 (posebna stranica). Vremenska osa počinje od samog trenutka udara u senzor.

<b>C.1</b> Na osnovu grafika procijenite ukupni impuls udarca.	<b>1.25[bod]</b>
--	------------------

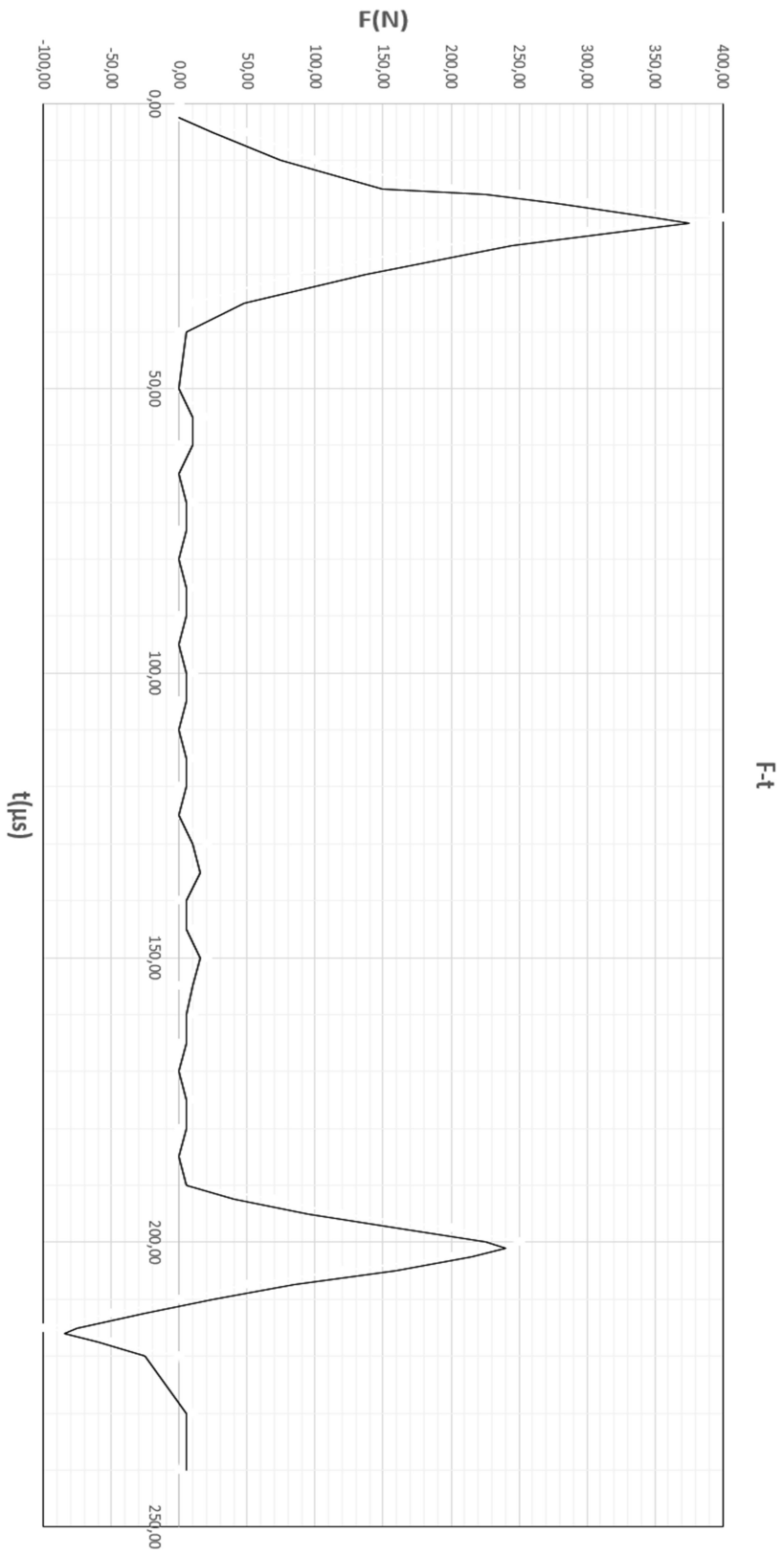
Iako bi očekivali da senzor registruje samo jedan ekstrem sile, eksperimentalno se mogu uočiti dva maksimuma i jedan minimum.

<b>C.2</b> Objasnite porijeklo drugih ekstrema (Nije potrebna računica, samo jedna dvije rečenice objašnjenja).	<b>0.5[bod]</b>
---	-----------------

Mehanizam kojim škampa postiže visoko ubrzanje šake možemo u najjednostavnijem modelu smatrati linearnom oprugom koeficijenta  $k_{eff}$  koju držimo kompresovanom za  $\Delta x = 10[mm]$  pod bravom.

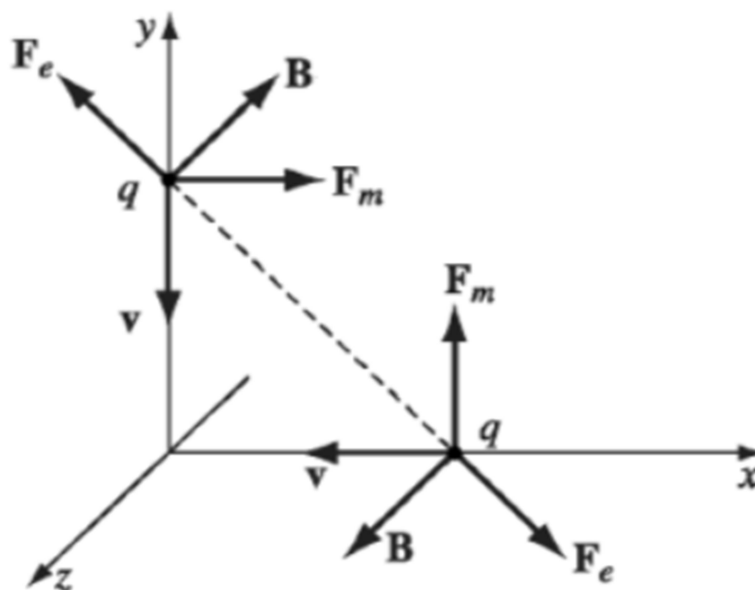
Radi trenja, zagrijavanja i elastične deformacije, škampa će moći prenijeti maksimalno 10% energije svog udarca na senzor.

<b>C.3</b> Ukoliko je masa senzora $m = 1[g]$ , odredite $k_{eff}$ .	<b>0.5[bod]</b>
--	-----------------



### Zadatak 2: Zakoni očuvanja u elektrodinamici 10.0[bod]

Krajem 19. stoljeća, postalo je jasno da postoji neslaganje između Njutnovih zakona mehanike i zakona elektrodinamike. Naime, moglo se pokazati da za određene konfiguracije naboja i struja naizgled ne vrijede zakoni održanja impulsa i ugaonog impulsa. Takav jedan primjer je prikazan na slici 1.



*Slika 2: Na slici su prikazana 2 naboja  $q$  koja se mimoilaze pod pravim uglom. Ukoliko nacrtamo dijagram sila, pokaže se da ne vrijedi III Njutnov zakon (a time i održanje impulsa)*

Ovaj problem je 1884. godine razriješio Britanski fizičar John Henry Poynting. Naime, on je pokazao da elektromagnetna polja sama po sebi nose određeni impuls, moment impulsa i energiju. Uvodeći tzv. Poyntingov vektor  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  (1), je uspio da redefiniše zakone održanja u elektrodinamici, time zadržavajući konzistenciju sa zakonima mehanike.

Ovaj zadatak se sastoji iz 3 odvojena dijela. U dijelu A ćemo se baviti očuvanjem energije, u dijelu B očuvanjem impulsa, a u dijelu C očuvanjem ugaonog impulsa.

Napomena: Iako se u tekstu ovog zadatka pojavljuju neki zapreminski i površinski integrali, nemojte se prepasti. Neće vam biti potrebna matematika van one koja se uči u srednjoj školi.

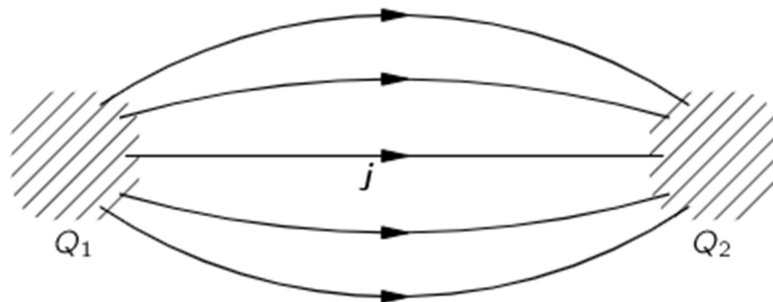
### Dio A: Očuvanje energije 3.5[bod]

Jasno je da, u općem slučaju, energija u prirodi nije očuvana. Da, iz drugog zakona termodinamike slijedi da će uvijek neki dio energije biti izračen iz sistema oslobođen u vidu toplote. Za nas fizičare bi ipak bilo od koristi da uspostavimo neku jednačinu koja će opisati protok izgubljene energije.

Poznato nam je da u slučaju gubitka naboja iz nekog sistema, možemo napisati relaciju:

$$\frac{dq}{dt} = \iiint \frac{d\rho}{dt} dV = - \iint \vec{j} \cdot \vec{dA} \quad (2)$$

U relaciji (2),  $q$  predstavlja naboj,  $j$  gustinu struje, a  $dV$  i  $dA$  su jedinična zapremina i površina respektivno. Relacija nam u biti govori o smjeru proticanja struje (promjena naboja u sistemu jednaka fluksu gustine struje). Ovo je prikazano na slici 2



Slika 3: Prikaz koji pojašnjava relaciju (2)

J.H. Poynting je pokazao da slična relacija vrijedi za energetske fluks:

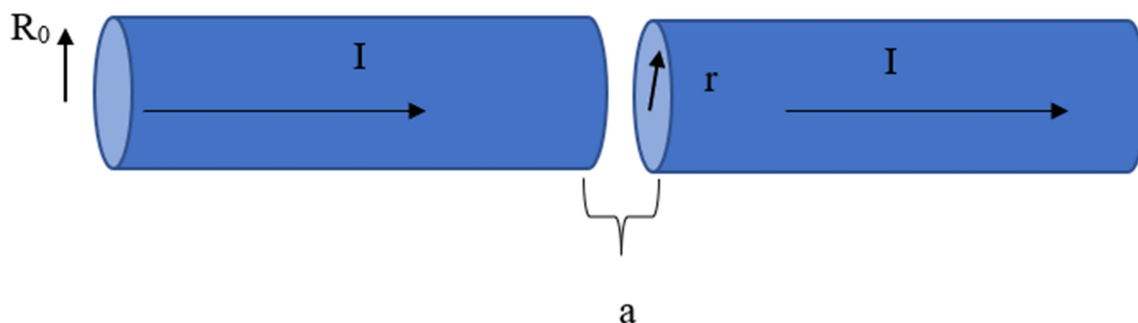
$$\iiint \frac{du}{dt} dV + \iint \vec{S} \cdot \vec{dA} = 0 \quad (3)$$

U relaciji (3)  $u$  je zapreminska gustina energije, a  $S$  je Poyntingov vektor dat u izrazu (1).

Relaciju (3) možete zamisliti na slijedeći način: Promjena energije u nekoj zatvorenoj zapremini je jednaka fluksu Poyntingovog vektora kroz vanjsku površinu date zapremine.

Kako biste se uvjerali u validnosti relacije (3), razmotriti ćemo slijedeći problem:

Na slici 3 je dat prikaz dugog cilindričnog provodnika postavljenog u vakuumu. Kroz provodnik radijusa  $R_0$  je prvobitno ravnomjerno tekla struja  $I$ . U trenutku  $t=0$  se napravio mali procjep širine  $a \ll R_0$ . Mi ćemo se u ovo zadatku baviti protokom energije u regionu procjepa.



Slika 4: Provodnik s malim procjepom

<p><b>A.1</b> Odredite vektore električnog <math>\vec{E}_{(r,t)}</math> i magnetnog polja <math>\vec{B}_{(r,t)}</math> u regiji procjepa kao funkcije vremena i rastojanja od ose provodnika. Koristite se činjenicom da je <math>a \ll R_0</math>.</p>	<p><b>1.25[bod]</b></p>
<p><b>A.2</b> Odredite Poyntingov vektor <math>\vec{S}_{(r,t)}</math> u procjepu kao funkciju rastojanja i vremena, te ga skicirajte zajedno sa E i B poljima. Također, odredite gustinu energije <math>u_{(r,t)}</math> unutar procjepa kao funkciju vremena.</p>	<p><b>1.15[bod]</b></p>
<p><b>A.3</b> Odredite vremensku promjenu ukupne energije u procjepu, te fluks Poyntingovog vektora. Pokažite da vrijedi relacija (3). Šta možete reći o smjeru protoka energije u sistemu (kako se razlikuje od tipične pretpostavke)?</p>	<p><b>1.1[bod]</b></p>

### Dio B: Očuvanje impulsa 2.0[bod]

Kao što je obrazloženo u uvodnom tekstu, Poyntingova teorema se prvobitno razvila kako bi opisala impuls elektromagnetnih polja.

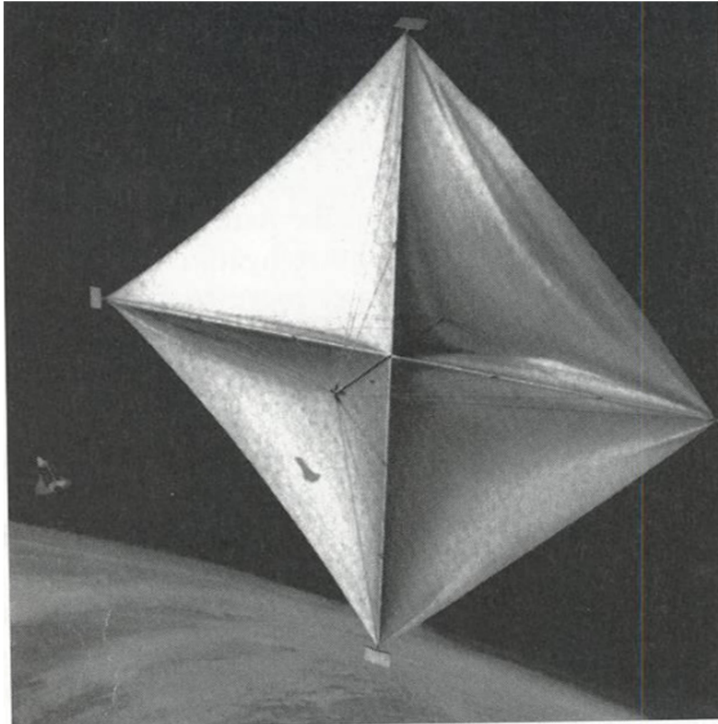
<p><b>B.1</b> Koristeći se relacijom (1), izvedite izraz za zapreminsku gustoću impulsa EM talasa <math>\vec{p}_v</math>.</p>	<p><b>0.9[bod]</b></p>
---	------------------------

Nakon otkrića da EM talasi nose impuls, počelo se razmišljati o praktičnim upotrebama tog impulsa. Ruski fizičar Konstantin Tsiokolsky (onaj koji je poznat po jednačini rakete) je 1924. godine predložio da se impuls EM talasa može koristiti za propulziju svemirske letjelice: tzv. solarnog jedra.

Solarno jedro (prikazano na slici 4) možemo smatrati tankim razapetim komadom idealno reflektivne metalne folije.

**B.2** Na solarno jedro mase  $m$  i površine  $A$ , normalno na površinu pada snop linearno polarizovanog laserskog zračenja kružne frekvencije  $\omega$  i maksimalne amplitude električnog polja  $E_0$ . Izvedite izraz za ubrzanje solarnog jedra  $a_T$  preko datih veličina i fundamentalnih konstanti. Zanemarite Dopplerov efekt, kao i širenje laserskog snopa.

**1.1[bod]**



*Slika 5: Prikaz solarnog jedra, koje je NASA koristila 1986. godine za misiju do Halley – eve komete*

### **Dio C: Očuvanje momenta impulsa 4.5[bod]**

U ovom dijelu zadatka ćemo, bez izvođenja, koristiti slijedeći izraz za zapreminski gustinu ugaonog impulsa EM polja u vakuumu:

$$\vec{l} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (4)$$

Gdje je  $\vec{r}$  radijus vektor od tačke oko koje gledamo zapreminsku gustinu momenta impulsa.

Koristeći se relacijom (4), opštu formu II Njutnovog zakona za rotaciju u elektrodinamici možemo napisati kao:

$$\Delta \vec{L}_{vanjsko} - \iiint \vec{l} dV - \vec{L}_{me} = 0 \quad (5)$$

U relaciji (5),  $\Delta \vec{L}_{vanjsko}$  je promjena ugaonog impulsa uslijed djelovanja vanjske sile, a  $\vec{L}_{me}$  je mehanički moment impulsa krutog tijela.

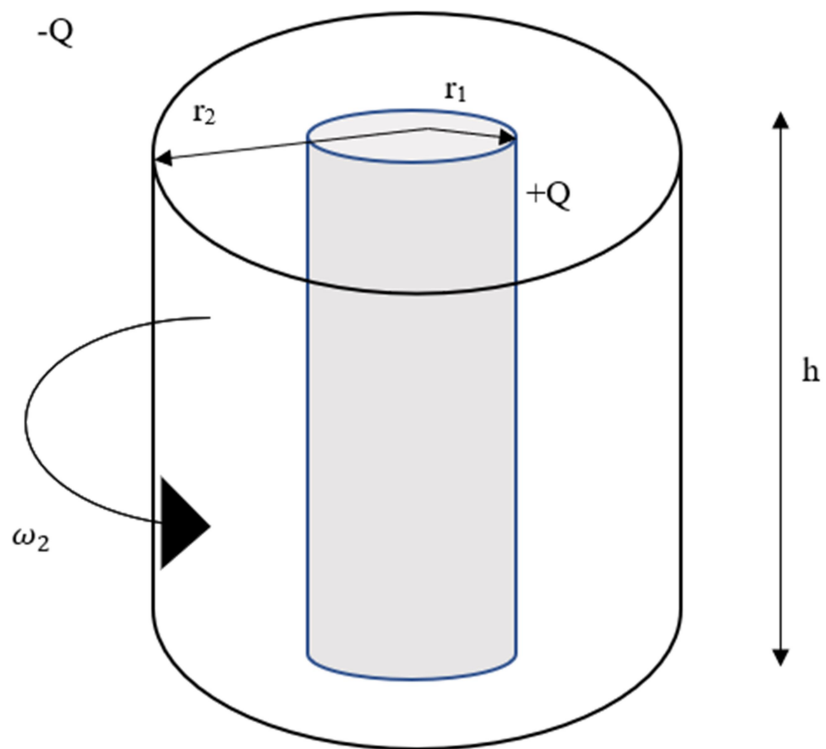
Prije nego što počnemo sa zadatkom, biti će nam od koristi da razmotrimo rotirajuću naelektrisanu cilindričnu ljusku ugaone brzine  $\vec{\omega}$ . Dužina ljuske je  $l$ , a radijus je  $R \ll l$ . Na površini je ravnomjerno raspoređen naboj  $Q$ .

<b>C.1</b> Odredite magnetno polje $\vec{B}$ koje proizvede ljuska u prostoru.	<b>0.7[bod]</b>
--	-----------------

Na slici 5 je dat prikaz dvaju dugih koncentričnih izolatorskih cilindričnih ljuski. Radijus vanjske ljuske je  $r_2$ , a unutarne  $r_1$ , a visina  $h$  im je ista. Obije ljuske su ravnomjerno površinski naelektrisane. Vanjska ima masu  $m_2$ , a unutarneja  $m_1 \gg m_2$ . Vanjska ljuska ima naboj  $-Q$ , a unutarneja  $+Q$ . Oba cilindra prvobitno miruju. U trenutku  $t=0$ , na spoljašnji cilindar počnemo djelovati vanjskim momentom sile, na takav način da mu sporo mijenjamo ugaonu brzinu od 0 do vrijednosti  $\omega_2$ .

<b>C.2</b> Nakon što vanjski dostigne konačnu ugaonu brzinu, unutarneji cilindar će se rotirati nekom ugaonom brzinom $\omega_1 \ll \omega_2$ . Odredite konačni ugaoni impuls unutarnejeg cilindra.	<b>2.2[bod]</b>
--	-----------------

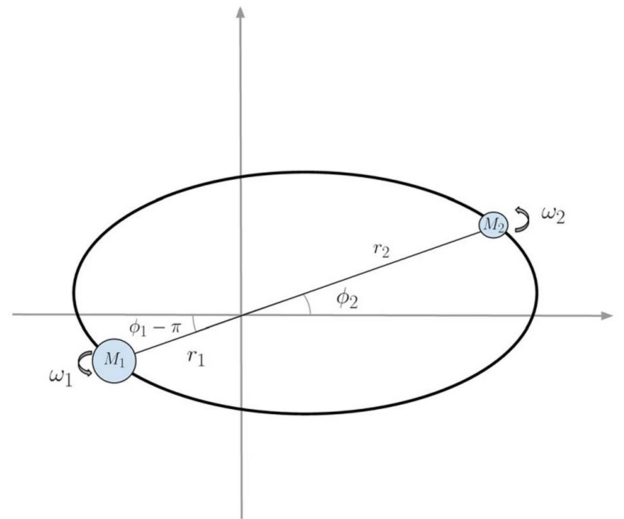
<b>C.3</b> Odredite ukupni ugaoni impuls EM polja, kao i promjenu ugaonog impulsa uslijed djelovanja vanjske sile, te pokažite validnost izraza (5).	<b>1.6[bod]</b>
--	-----------------



Slika 6: Koncentrične naelektrisane ljuske

### Zadatak 3 – Binarni sistem nebeskih tijela

U ovom zadatku razmatramo rotaciju binarnog sistema nebeskih tijela koji se sastoji od dva tijela masa  $M_1$  i  $M_2$  i koji rotiraju oko zajedničkog centra mase kao na slici ugaonim brzinama  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ . Rastojanja od centra mase su  $r_1$  i  $r_2$ . Pored orbitalne rotacije, tijela rotiraju i oko vlastitih osa ugaonim brzinama  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Momenti inercije oko vlastitih osa su  $I_1$  i  $I_2$ .



- Napišite izraz za ukupni moment impulsa sistema  $L$ . **(1b)**
- Pokažite eksplicitno da su orbitalne ugaone brzine  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  jednake. **(2b)**
- Izvedite izraz za ukupnu mehaničku energiju sistema  $E$  napisanu pomoću momenata impulsa, masa, momenata inercije, ugaonih brzina  $\omega_1$  i  $\omega_2$  i rastojanja  $r_2$ . **(2b)**
- Razmotrimo sada specijalni slučaj rotacije manjeg tijela mase  $M_2$  oko mnogo većeg nebeskog tijela mase  $M_1$ , kao što je slučaj rotacije mjeseca Phobosa oko Marsa. U tom slučaju masa Marsa  $M = M_1 \gg M_2 = m$  od mase Phobosa. Rotaciju Phobosa oko vlastite ose možemo zanemariti tj.  $\omega_2 = 0$  jer je po veličini mnogo manji od Marsa. Ugaona brzina rotacije Marsa oko vlastite ose iznosi  $\omega_1 = \omega$ , a moment inercije  $I_1 = I$ . Izvedite izraz za energiju ovog sistema. Smatrati da Phobos kruži po kružnici poluprečnika  $r$ . **(2b)**
- Izvedite izraz za nelinearnu jednačinu iz koje se dobija rastojanje Phobosa oko Marsa pri kojem je energija sistema ima ekstremum. **(2b)**
- Trenutno rastojanje Phobosa od Marsa iznosi  $r_0 = 9375$  km. Ispitati da li se energija sistema povećava ili smanjuje sa povećanjem rastojanja, ako su poznate sljedeće vrijednosti:  $L = 2,08 \cdot 10^{32}$  kgm<sup>2</sup>/s,  $M = 6,39 \cdot 10^{23}$  kg,  $m = 1,08 \cdot 10^{16}$  kg,  $\omega = 7,09 \cdot 10^{-5}$  s<sup>-1</sup>,  $I = 2,96 \cdot 10^{36}$  kgm<sup>2</sup>. **(1b)**

Univerzalna gravitaciona konstanta iznosi  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>kg<sup>-2</sup>.

# Federalno Takmičenje 2022

## Zadatak 1-Rješenje

Muhamed Sokolović  
Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo

### 1 Dio A: 4.5 [bod]

#### 1.1 A1: 1.5 [bod]

Iz sferne simetrije problema, promjenu zapremine mjehura u jedinici vremena možemo izraziti kao:  $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dot{r}$ , gdje je  $r$  radijus mjehura.

Pošto je fluid nekompresibilan, iz očuvanja mase slijedi da:  $4\pi r^2 \dot{r} = 4\pi r'^2 \dot{r}'$ , gdje je  $r' > r$  proizvoljan radijus. Kinetička energija je:

$$E_K = \int_r^\infty \frac{\rho_v}{2} \left(\frac{\dot{r} r^2}{r'^2}\right)^2 4\pi r'^2 dr' = 2\pi \rho_v \dot{r}^2 r^3 \quad (1)$$

#### 1.2 A2: 1.0 [bod]

Pošto pretpostavljamo da je proces adijabatski, slijedi  $E_K = A$ . Ukupan rad koji fluid vrši na mjehur prilikom smanjenja radijusa  $r_0 \rightarrow r$  je:

$$W = p\Delta V = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r_0^3)p_v \quad (2)$$

Kombinujući (1) i (2), uz malo algebre, dobivamo Rayleigh-Plessett jednačinu:

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1 = \frac{3\rho_v}{2p_v} \dot{r}^2 \quad (3)$$

#### 1.3 A3: 0.7 [bod]

Počevši od (3), vršimo separaciju varijabli tako što na jednu stranu jednakosti prebacimo sve  $r$  a na drugu sve  $t$ . Uvažavamo da  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ . Pa dobivamo:

$$dt = \sqrt{\frac{3\rho_v}{2p_v}} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 - 1}}$$

Ovo možemo integrirati s obje strane i pri tome uzeti smjenu  $x = \frac{r_0}{r}$ :

$$\tau = r_0 \sqrt{\frac{3\rho_v}{2p_v}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^{-3} - 1}} dx \approx 0.915 r_0 \sqrt{\frac{\rho_v}{p_v}} \quad (4)$$

Uvrštavajući brojčane vrijednosti:  $\tau \approx 247[\mu s]$

#### 1.4 A4: 1.0 [bod]

Uvedimo slijedeću notaciju:  $m \rightarrow$  masa;  $T \rightarrow$  temperatura;  $t \rightarrow$  vrijeme;  $l \rightarrow$  dužina. Tada, proporcionalnost fizičkih veličina možemo napisati kao:

$$\begin{aligned}c_g &\sim l^1 T^{-1} t^{-2} \\ \kappa &\sim m^1 t^{-3} T^{-1} \\ \rho_g &\sim m^1 t^{-3} \\ r_0 &\sim t^1\end{aligned}$$

Također, uvedimo konstante  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , tako da:  $c_g^a \kappa^b \rho_g^c r_0^d \sim t^1$ . Dobivamo sistem 4 jednačine sa 4 nepoznate:

$$\begin{aligned}1a+0b-3c+1d &= 0 \\ -1a-1b+0c+0d &= 0 \\ -2a-3b+0c+0d &= 1 \\ 0a+1b+1c+0d &= 0\end{aligned}$$

U matricnoj reprezentaciji:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ovaj sistem možemo riješiti brojnim metodama, da na kraju dobijemo:  $a = 1$ ;  $b = -1$ ;  $c = 1$ ;  $d = 2$ . Dimenzionalnom analizom:

$$\tau_c \sim \frac{\rho_g c_g r_0^2}{\kappa} \quad (5)$$

#### 1.5 A4: 0.3 [bod]

Uvrštavajući brojčane vrijednosti u (4) i (5) dobivamo:  $\tau_c \approx 114[\mu s] < \tau$ .

Dakle, termodinamički proces u pitanju je više sličan adijabatskom nego izotermnom. Ipak, adijabatska aproksimacija je dosta gruba i na vrlo niskim vrijednostima radijusa totalno prestaje važiti. Između ostalog, neće važiti radi sonoluminescencije kolapsirajućeg mjehura<sup>[1]</sup>. Radi jednostavnost, mi te efekte nismo posmatrali u ovom zadatku.

## 2 Dio B: 3.25[bod]

### 2.1 B1: 1.0 [bod]

Pošto je kolaps mjehura adijabatski, možemo napisati:  $TV^\gamma = \text{const.}$ . Za jednoatomni gas je  $\gamma = \frac{5}{3}$ . Kako je  $V \sim r^3$ , možemo dobiti:

$$T_{(r)} = T_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \quad (6)$$

Iz zakona idealnog gasa:  $pV = nRT$ , pa možemo napisati:

$$p_{(r)} = p_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^5 \quad (7)$$

## 2.2 B2: 1.0 [bod]

Uvedeći smjenu  $\omega = \frac{r_0}{r}$ , te koristeći (7):

$$\begin{aligned}d(\omega^3 \dot{\omega}^2) &= \frac{2p_v}{\rho r_0^2} \left( \frac{p_0}{p_v} \omega^{-3} - \omega^2 \right) \\ \omega^3 \dot{\omega}^2 &= \int_{\omega'}^1 \frac{2p_v}{\rho r_0^2} \left( \frac{p_0}{p_v} \omega^{-3} - \omega^2 \right) d\omega' \\ \omega^3 \dot{\omega}^2 &= \frac{2p_v}{\rho r_0^2} \left( \frac{p_0}{2p_v} + \frac{1}{3} - \frac{p_0}{2p_v \omega^2} - \frac{\omega^3}{3} \right) \\ \dot{\omega}^2 &= \frac{2p_v}{\rho r_0^2} \frac{1}{\omega^3} \left( \frac{p_0(\omega^2 - 1)}{2p_v \omega^2} + \frac{(1 - \omega^3)}{3} \right)\end{aligned}$$

Tražene konstante su:  $c_1 = \frac{2p_v}{\rho r_0^2}$ ,  $c_2 = \frac{p_0}{2p_v}$  i  $c_3 = \frac{1}{3}$

## 2.3 B3: 1.25 [bod]

Radijus će dostići ekstremalnu vrijednost kada  $\dot{\omega}^2 = 0$ . Uvrštavajući brojčane vrijednosti, dobivamo izraz:

$$-200\omega^5 + 203\omega^2 - 3 = 0 \quad (8)$$

Jednačinu (8) ne možemo riješiti analitički, ali je ipak možemo riješiti drugim metodama poput Njutnove metode, ili numeričkim metodama. Dobivamo 3 realna korijena:

$$\omega_1 = -0.121 \qquad \omega_2 = 0.121 \qquad \omega_3 = 1$$

Prvo rješenje je nefizikalno, treće rješenje predstavlja maksimum, a drugo rješenje je traženi minimum. Dakle:

$$r_m \approx 0.33[\text{mm}] \quad (9)$$

Uvrštavanjem (9) u (6), dobivamo odgovarajuću temperaturu:

$$T_m \approx 2 \cdot 10^4 [\text{K}] \quad (10)$$

Naravno, ovu vrijednost dobivamo jer smo uzeli strogu adijabatsku aproksimaciju i aproksimaciju homogenosti gasa. Eksperimentalno utvrđena vrijednost za maksimalnu temperaturu je oko 4 puta manja. <sup>[2]</sup>

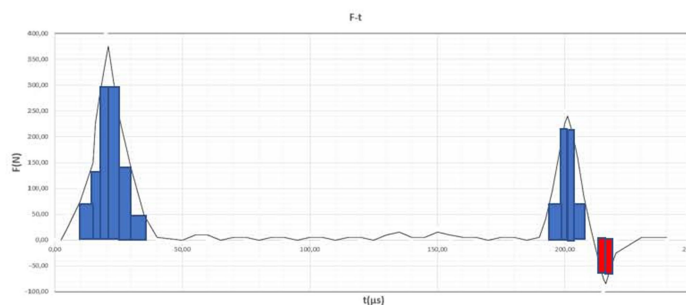
## 3 Dio C: 2.25[bod]

### 3.1 C1: 1.25 [bod]

Prema definiciji:  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{P} = \int \vec{F} dt$ . Matematička interpretacija integrala je površina ispod grafika. Mi datu površinu možemo procijeniti metodom

prebrojavanja kvadrata (Slika). Dobijemo približnu vrijednost:

$$P \approx 6.5 \left[ \frac{gm}{s} \right] \quad (11)$$



### 3.2 C2: 0.5 [bod]

Prvo, primjetimo da se drugi maksimum na grafiku javlja u isto vrijeme kao vrijeme kolapsa  $\tau$  izračunatog u dijelu A2. Nakon kolapsa mjehura do radijusa  $r_m$  dio energije će se osloboditi u vidu udarnog vala (eng. shockwave). Ovo objašnjava niži maksimum. Minimum na grafiku se javlja pri početku druge faze kontrakcije (implozije) mjehura. [3]

### 3.3 C3: 0.5 [bod]

Kinetičku energiju udarca možemo naći kao  $E_K = \frac{P^2}{2m}$ . U zadatku je rečeno da ovo odgovara jednoj petini potencijalne energije mišića:  $E_K = 0.1E_p = 0.1 \frac{k_{eff}(\Delta x)^2}{2}$

$$k_{eff} = 10 \frac{P^2}{m(\Delta x)^2} \quad (12)$$

Uvrštavajući (11) u (12) dobijemo:  $k_{eff} \approx 40.23 \left[ \frac{N}{mm} \right]$ , što je u dobrom slaganju sa tipičnim intervalom za ovu vrstu škampi. [4]

## 4 Literatura

Formule, kao i brojne vrijednosti konstanti su preuzete iz navedene literature:

- [1]C.E.Brennen,*An Introduction to Cavitation Fundamentals*,Bilješke sa predavanja na California Institute of Technology, Pasadena, California, USA
- [2]K. S. Suslick, W. B. McNamara III Y. Didenko, *Hot Spot Conditions during Multi-Bubble Cavitation*,NATO ASIC,volume 524
- [3]S. N. Patek R. L. Caldwell, *Extreme impact and cavitation forces of a biological hammer: strike forces of the peacock mantis shrimp Odontodactylus scyllarus*, *Journal of Experimental Biology*, Volume 208, Issue 19, 2005
- [4]S. N. Patek,M. V. Rosario J. R. A. Taylor, *Comparative spring mechanics in mantis shrimp*, *Journal of Experimental Biology*, Volume 216, Issue 13, 2013

## 5 Završni komentar

Želio bih da kažem da je ideja za zadatak nastala nakon gledanja videa "Mantis Shrimp Punch at 40,000 fps! - Cavitation Physics", sa YouTube kanala "Physics Girl". Kanal je generalno vrlo interesantan, pa bih preporučio svim mladim fizičarima i fizičarkama da se pretplate ☺!

Federalno Takmičenje 2022  
Zadatak 2-Rješenje

Muhamed Sokolović  
Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo

**1 Dio A: 3.5[bod]**

**1.1 A1: 1.25[bod]**

Prvo, uočimo da će procjep žice činiti pločasti kondenzator. Tokom vremena će se puniti kondenzator, pa možemo napisati:  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$ , gdje je  $\sigma = \frac{Q(t)}{\pi R_0^2}$ . Vremensku ovisnost naboja možemo izraziti kao:  $Q_t = It$ . Konačno:

$$\vec{E}_{(r,t)} = \frac{It}{\pi \epsilon_0 R_0^2} \hat{z}; r \leq R_0 \quad (1)$$

Za magnetno polje možemo napisati:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \pi r^2$ , iz čega:

$$\vec{B}_{(r,t)} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_0^2} \hat{\phi}; r \leq R_0 \quad (2)$$

**1.2 A2: 1.15[bod]**

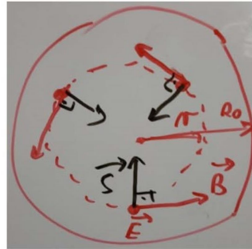
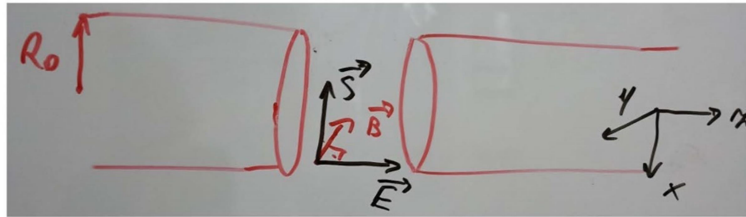
Koristeći (1) i (2), možemo napisati:

$$\vec{S}_{(r,t)} = \frac{\vec{E}_{(r,t)} \times \vec{B}_{(r,t)}}{\mu_0} = -\frac{I^2 t r}{2\pi^2 \epsilon_0 R_0^4} \hat{r}; r \leq R_0 \quad (3)$$

Za gustinu energije možemo iskoristiti poznatu formulu:  $u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$ . Uvrštavajući (1) i (2)

$$u_{(r,t)} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 R_0^4} ((ct)^2 + (r/2)^2) \quad (4)$$

Gdje smo iskoristili da je brzina svjetlosti u vakuumu  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  Skica je prikazana na Slici:



Tipična pretpostavka bi bila da energija teče u smjeru z ose. Međutim, iz Poyntingove teoreme vidimo da ona ulazi sa vanjske površine procjepa.

### 1.3 A3: 1.1[bod]

Ukupnu energiju procjepa možemo dobiti tako što integrišemo izraz (4) po zapremini procjepa:

$$U_{(r,t)} = \oint_V u_{(r,t)} dV = \int_0^{R_0} 2a\pi r u_{(r,t)} dr = 2\pi a \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 R_0^4} \int_0^{R_0} ((ct)^2 + (r/2)^2) dr = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi R_0^2} \left( (ct)^2 + \frac{R_0^2}{8} \right)$$

Vremenska promjena je onda:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{I^2 at}{\pi \epsilon_0 R_0^2} \quad (5)$$

Koristeći izraz (3):

$$\oint_A \vec{S}_{(r,t)} \cdot d\vec{A} = -\frac{I^2 at}{\pi \epsilon_0 R_0^2} \quad (6)$$

Očito, vidimo da zbrajanjem (5) i (6) dobijemo nulu. Time smo potvrdili Poyntingovu teoremu.

## 2 Dio B: 2.0[bod]

### 2.1 B1: 0.9[bod]

Impuls fotona je:  $p = \frac{U}{c}$ , gdje je U energija. Za EM zračenje možemo napisati:  $p_v = \frac{dp}{dV} = \frac{SdAdt}{cdAdx}$ , ovdje smo iskoristili  $dU = SdAdt$ . Imamo da je  $c = \frac{dx}{dt}$ . Konačno, vektor gustine impulsa možemo napisati kao:

$$\vec{p}_v = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (7)$$

### 2.2 B2: 1.1[bod]

Za ravni EM talas, imamo da je  $B = \frac{E}{c}$ . Vremenski usrednjena gustoća impulsa je:  $\langle \vec{p}_v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c}$ . Srednji pritisak na jedro računamo kao:  $P = 2 \langle \vec{p}_v \rangle c = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$ , gdje faktor 2 potiče od idealne reflektivnosti površine. Sad je trivijalno naći ubrzanje preko II Njutnovog zakona:

$$F = ma = PA \Rightarrow a_T = \frac{\epsilon_0 E_0^2 A}{2m} \quad (8)$$

## 3 Dio C: 4.5[bod]

### 3.1 C1: 0.7[bod]

Kako je vanjska ljuska naelektrisana, usljed njene rotacije će doći do stvaranja magnetnog polja. Pošto je  $h \gg r_2$  možemo uzeti aproksimaciju magnetnog polja zavojnice. Iz Amperovog zakona:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \frac{d(\sigma r_2 h \phi)}{dt} = \sigma r_2 h \frac{d\phi}{dt}$$

Gdje je  $\sigma = \frac{Q}{2\pi r_2 h}$ ,  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl$ , a  $\frac{d\phi}{dt} = \omega$ . Konačno:

$$\vec{B}_{(t)} = -\mu_0 \sigma r_2 \omega(t) \hat{z} \quad (9)$$

### 3.2 C2: 2.2[bod]

Usljed promjene unutarnjeg polja u regionu  $r_1 \leq r \leq r_2$ , doći će do indukcije kružnog E polja. Iz Faradejevog zakona:  $\oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \phi_E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\pi r^2 \mu_0 \frac{Q}{2\pi h} \omega)$   
 $\oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = E_{ind} 2\pi r$ , odakle:

$$\vec{E}_{ind} = \frac{\mu_0 r Q}{4\pi h} \frac{d\omega}{dt} \hat{\phi} \quad (10)$$

Pošto je unutarnja ljuska naelektrisana. Osjetiti će indukocani moment sile:  $\vec{M}_{ind} = Q \vec{r}_1 \times \vec{E}_{ind}$ . Ukupni ugaoni impuls unutarnje ljuske je:

$$\vec{L}_1 = \int \vec{M}_{ind} dt = \frac{\mu_0 r_1^2 Q^2}{4\pi h} \int_0^{\omega_2} d\vec{\omega} = \frac{\mu_0 r_1^2 Q^2 \vec{\omega}_2}{4\pi h}$$

Međutim, mehanički ugaoni impuls ljuske 1 je:  $\vec{L}_1 = \frac{m_1 \vec{\omega}_1 r_1^2}{2}$ . Konačno:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\mu_0 Q^2 \omega_2}{2\pi m_1 h} \hat{z} \quad (11)$$

Ovdje je bitno za napomenuti da smo zanemarili promjenu magnetnog fluska u unutarnjoj ljusci. Međutim kako je  $m_1 \gg m_2$ , ova aproksimacija je opravdana.

### 3.3 C3: 1.6[bod]

Vanjska ljuska će također doživjeti indukovanu silu radi promjene magnetnog polja, po analogiji možemo pokazati da je:

$$\int \vec{M}_{vanjsko} dt = \frac{\mu_0 Q^2 r_2^2 \vec{\omega}_2}{4\pi h} + \frac{m_2 r_2^2 \vec{\omega}_2}{2} \quad (12)$$

Koristeći (11), ukupni mehanički moment impulsa možemo napisati kao:

$$\vec{L}_{meh} = \frac{m_2 r_2^2 \vec{\omega}_2}{2} + \frac{\mu_0 r_1^2 Q^2 \vec{\omega}_2}{4\pi h} \quad (13)$$

Sada, da bismo izračunali električni moment impulsa, prvo trebamo odrediti  $\vec{S}$ . Iz Gaussovog zakona, E polje će jedino postojati u regionu  $r_1 \leq r_2$ :

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = E \cdot 2\pi r h \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h r} \hat{r} \quad (14)$$

Koristeći (14) i (9), gustinu električnog ugaonog impulsa dobivamo kao:

$$\vec{l} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\mu_0 Q^2 \omega_2}{4\pi^2 h^2} \hat{z}$$

Ukupni električni impuls je:

$$\vec{L}_{EM} = \oint_V \vec{l} dV = \frac{\mu_0 Q^2 (r_2^2 - r_1^2) \vec{\omega}_2}{4\pi h} \quad (15)$$

Kombinujući (12), (13) i (15) možemo lahko pokazati validnost opšteg izraza za II Njutnov zakon.

### Rješenje zadataka 3

- a) Ukupni moment impulsa sistema je jednak zbiru svih momenata:

$$L = M_1 r_1^2 \Omega_1 + I_1 \omega_1 + M_2 r_2^2 \Omega_2 + I_2 \omega_2 \quad (1.0)$$

Impuls sistema je konstantan jer na system ne djeluju vanjske sile.

- b) U sistemu referencije koji je vezan za centar mase vrijedi

$$M_1 r_1 = M_2 r_2 \Rightarrow r_1 = \frac{M_2}{M_1} r_2 \quad (0.75)$$

kao i  $M_1 v_1 = M_2 v_2$ , odnosno,  $M_1 r_1 \Omega_1 = M_2 r_2 \Omega_2$ . (0.75). Kombinacijom ova dva izraza dobije se  $\Omega_1 = \Omega_2$  (0.5).

- c) Prvo ćemo izraziti orbitalne ugaone brzine preko momenta impulsa:

$$L = M_1 r_1^2 \Omega_1 + I_1 \omega_1 + M_2 r_2^2 \Omega_2 + I_2 \omega_2 \Rightarrow L - I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2 = M_1 \left( \frac{M_2}{M_1} r_2 \right)^2 \Omega_2 + M_2 r_2^2 \Omega_2 \quad (0.25)$$

Sređivanjem ovog izraza dobija se

$$\Omega_2 = \Omega_1 = \frac{M_1 L - I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2}{M_2 (M_1 + M_2) r_2^2} \quad (0.25)$$

Ukupna mehanička energija sistema je jedna zbiru potencijalne energije i kinetičke energije rotacionog kretanja:

$$E = -\gamma \frac{M_1 M_2}{r_1 + r_2} + \frac{1}{2} M_1 r_1^2 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \Omega_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$$

(0.25)

Uvrštavanjem gornjim relacija u ovaj izraz može se pokazati da vrijedi

$$E = -\gamma \frac{M_1^2 M_2}{(M_1 + M_2)r_2} + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{M_1}{2M_2} \frac{(L - I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2)^2}{(M_1 + M_2)r_2^2}$$

(0.5)

- d) U ovom slučaju Phobos rotira oko Marsa. Centar sistema nalazina Marsu tako se ovo kretanje svodi na problem kretanja jednog dijela, umjesto dva. Gravitaciona sila ima ulogu centripetalne sile pa se može pisati

$$m\Omega^2 r = \gamma \frac{mM}{r^2} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{r^3}}$$

(0.5)

Moment impulsa sistema je jednak  $L = I\omega + mr^2\Omega \Rightarrow \omega = \frac{L - \sqrt{\gamma m^2 M r}}{I}$  (0.25).

Uvrštavanjem u gornju izraz za energiju sistema dobijamo

$$E = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2m} \frac{(L - I\omega)^2}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2I} - \frac{L}{I} \sqrt{\gamma m^2 M r} + \frac{\gamma m^2 M r}{2I}$$

(1.25)

- e) Energija sistema zavisi od rastojanja između Marsa i Phobosa. Da bismo našli rastojanje na kojem je energija sistema minimalna, derivirat ćemo gornju relaciju i izjednačini sa nulom:

$$\frac{dE(r_0)}{dr} = \gamma \frac{mM}{r_0^2} - \frac{L}{2I} \frac{\gamma m^2 M}{\sqrt{\gamma m^2 M r}} + \frac{\gamma m^2 M r}{2I} = 0$$

(1.0)

Nakon sređivanja dobija se izraz

$$r_0^2 - \frac{L}{m} \frac{1}{\sqrt{\gamma m^2 M}} r_0^{\frac{3}{2}} + \frac{I}{m} = 0$$

Ovo je nelinearna jednčina koja se ne može analitički riješiti.

**(1.0)**

- f) Ako bismo uvrstili podatke koji su dati u tekstu zadatka, dobili bismo da je desna strana nelinearne jednačine pozitivna, što znači da funkcija  $E(r_0)$  ima tendenciju rasta za datu vrijednost  $r_0$ .

**(1.0)**

## Rezultati

### Grupa A – mehanika i termodinamika

Učenik	Škola	Razred	Z1	Z2	Z3	Z 4	Ukupno
Husein Jašić	Behram-begova medresa, Tuzla	II	25	25	8.5	23	81.5
Muhamed Numanović	Behram-begova medresa, Tuzla	I	25	19	12	25	81
Magdalena Grbavac	Gimnazija "fra Grge Martića", Mostar	II	25	18	7	13	63
Ana Tomić	Gimnazija "fra Grge Martića", Mostar	II	25	25	0.5	8	58.5
Harun Ibrahimagić	Prva gimnazija, Zenica	III	25	9	9.5	14.5	58
Danis Fejzić	Druga gimnazija, Sarajevo	I	25	18	8	3.5	54.5
Nedim Begović	Druga gimnazija, Sarajevo	I	25	10	5.5	12	52.5
Lejla Baturić	Behram-begova medresa, Tuzla	I	25	10	8.5	7.5	51
Ibrahim Tabaković	Gazi Husrev-begova medresa, Sarajevo	IV	25	4	9	13	51
Amar Operta	Gimnazija Visoko	I	25	10	4	10	49
Patrik Čeko	KŠC "Petar Barbarić", Travnik	III	25	7	10.5	5.5	48
Amina Gicić	Treća gimnazija, Sarajevo	I	20	10	9.5	8	47.5
Filip Krištić	KŠC "Sv. Josip", Sarajevo	I	25	8	4	7	44

Lamija Gilić	Treća gimnazija, Sarajevo	III	25	9	6	1	41
Nadža Ganić	MSS "Hazim Šabanović", Visoko	II	25	3	3.5	8	39.5
Selver Sarajlić	Behram-begova medresa, Tuzla	I	25	8	5	0	38
Laila Zildžić	Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić", Gračanica	IV	25	6	2	5	38
Nik Čolić	Druga gimnazija, Sarajevo	III	25	6	0	4.5	35.5
Nađa Masleša	Srednja škola Konjic	II	25	2	1.5	5	33.5
Alen Hrnjić	Gimnazija Bihać	IV	25	5	1.5	1.5	33
Nejra Hajrić	Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo	III	25	7	0	0	32
Hamza Bubalo	Srednja škola Konjic	II	25	2	3	2	32
Ajdin Ajanović	Richmond Park Schools Sarajevo	I	25	3	0	0.5	28.5
Emin Beganović	Prva gimnazija, Zenica	IV	25	2	0	0	27
Usama Khedr	MSS Travnik	III	10	8	3	5.5	26.5
Darijo Olad	Gimnazija Čapljina	II	10	0	7.5	4	21.5
Elmas Hamidović	Srednja tehnička škola Zavidovići	II	10	8	0	1.5	19.5
Anamarija Ljubas	KŠC "Petar Barbarić", Travnik	III	7	7	2.5	2	18.5
Amra Kelić	MSS Donji Vakuf	I	10	7	0	0	17
Amer Azapagić	Gimnazija "Vaso Pelagić", Brčko	I	10	2	1.5	0	13.5
Amar Čengić	MSS "Enver Pozderović", Goražde	I	10	0	1.5	0	11.5
Ali Hadžić	MSTŠ Travnik	I	7	0	1.5	0	8.5

**Grupa B – elektromagnetizam, oscilacije i talasi**

Mjesto	Ime i prezime	Škola	Z1	Z2	Z3	Z4	Ukupno
1	Affan Kaknjo	Prva gimnazija Zenica	15	15	18	7	55
2	Harun Alibegović	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	12	5	30	2	49
3	Hana Zaimović	Gimnazija Muhsin Rizvić Kakanj	15	7	20	3	45
4	Kanita Rakovac	Gimnazija Meša Selimović Tuzla	15	20	3	5	43
5	Ajla Baturić	Behram-begova medresa Tuzla	15	15	2	4	36
6	Emina Hasanbegović	Druga gimnazija Sarajevo	8	9	15	2.5	34.5
7	Kerim Mujkanović	Gimnazija Musa Ćazim Ćatić Tešanj	11	15	6.5	1.5	34
8	Alem Karić	Druga gimnazija Sarajevo	15	5	5	2	27
9	Tarik Agić	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	15	9	0	1.5	25.5
10	Emina Suljić	Treća gimnazija Sarajevo	0	15	2	5	22
11	Tomislav Šilić	Škola GFGM Mostar	15	0	3	3	21
12	Ammar Turbić	Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	15	0	2	3	20
13	Ensar Mujić	JUMSŠ Banovići	15	4	0	0	19
13	Emir Halilović	JUMS Elektrotehnička škola Tuzla	1	15	2	1	19
15	Amna Opačin	SC Nedžad Ibrišimović Ilijaš	14	2	0	1	17
16	Lejla Nuhić	Druga gimnazija Mostar	15	0	0	1	16
17	Fatima Aletić	MŠŠ Bugojno	3	10	2	0	15
18	Faruk Sijerčić	Gimnazija Visoko	0	10	0	0	10

18	Luka Jerković	Srednja elektrotehnička škola Ruđer Bošković Mostar	0	10	0	0	10
20	Tarik Salibašić	STŠ Tešanj	0	1	1	2.5	4.5
20	Amir Džafić	MŠŠ Enver Pozderović Goražde	0	0	0	4.5	4.5
21	Matej Šego	Srednja škola dr. fra Slavka Barbarića Čitluk	0	0	1	0	1
21	Damir Muharem	STŠ "Hasib Hadžović" Goražde	1	0	0	0	1
21	Maida Biber	Srednja škola Konjic	1	0	0	0	1

**Grupa C – optika, atomska i nuklearna fizika**

Mjesto	Ime i prezime	Škola	Z1	Z2	Z3	Z4	Ukupno
1	Tarik Mujkić	Gimnazija Rizah Odžečkić Zavidovići	25	19	22	21	87
2	Malik Halilović	Medicinska škola Zenica	25	12	17	20	74
3	Irma Galijašević	Treća gimnazija Sarajevo	25	9	21	18	73
4	Edin Živojević	MŠŠ Enver Pozderović Goražde	25	8	17	19	69
5	Haris Mališević	Druga gimnazija Sarajevo	25	9	18	11	63
6	Belmin Durmo	Prva gimnazija Zenica	12.5	5	23	19	59.5
7	Azra Imamović	JU Mješovita srednja škola Živinice	12.5	11	21	14	58.5
8	Aida Duraković	Gimnazija Visoko	5.25	16	21	16	58.25
9	Belma Alagić	Gimnazija Bihać	25	7	9	17	58
10	Mahir Suljić	MŠŠ Srebrenik	5.5	9	18	22	54.5
11	Ahmed Softić	MŠŠ Travnik	6.75	9	17	16	48.75
12	Elnur Avdibašić	Gimnazija Meša Selimović Tuzla	25	8	5	10	48
13	Hana Šolbić	Gimnazija Muhsin Rizvić Kakanj	0	5	19	15	39
14	Adna Bosačić	Treća gimnazija Sarajevo	0	7	20	10	37
15	Anur Smailhodžić	MŠŠ Enver Pozderović	5.5	6	0	25	36.5
16	Mario Vukoja	Gimnazija fra Grge Martića Mostar	6.5	9	3	17	35.5
17	Esmir Zoletić	JU Gimnazija Živinice	3	6	10	15	34
18	Sara Skejić	Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	0	7	5	15	27

18	Nejira Sarajlić	Richmond Park International Secondary School Tuzla	25	0	0	2	27
20	Irma Lipovac	Druga gimnazija Mostar	0	9	16	0	25
21	Selma Holjan	Treća gimnazija Sarajevo	0	9	10	0	19
21	Ana-Marija Prskalo	Gimnazija fra Grge Martića Mostar	3	6	0	10	19
23	Edi Đelmo	Srednja škola Jablanica	0	6	0	10	16
24	Semir Jamaković	STŠ "Hasib Hadžović" Goražde	0	12	0	0	12
25	Luka Merdžo	Gimnazija Mostar	2.5	0	0	3	5.5

**Grupa D – cjelokupna fizika**

Ime i prezime	Škola	Z1			Z2			Z3	Total
		A	B	C	A	B	C		
Dženan Midžić	JU Gimnazija Bihać	2.8	2.75	2.05	3.5	0.9	0.3	8.5	20.8
Fatih Žgalj	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	4.5	2.9	2.25	0.6	0.7	0.5	6.25	17.7
Elmir Kevilj	Gimnazija Muhsin Rizvić Kakanj	2.2	2.3	1.25	0	0.1	0.4	5.5	11.75
Haris Imamović	Druga gimnazija Sarajevo	2.2	0.2	1.95	0.5	0.3	0	6.5	11.65
Džan Ibrahimović	Richmond Park Schol Sarajevo	2	0	0	0	0	0	6.25	8.25
Adin Frljak	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	1.4	1	2.05	0.1	0.6	0	3	8.15
Adna Mujkanović	Gimnazija Musa Ćazim Ćatić Tešanj	1.5	0.2	1.25	0	0	0.2	4	7.15
Nina Brkić	Gimnazija Musa Ćazim Ćatić Tešanj	0.3	1	1.45	0.1	0	0	3	5.85
Esma Jakupović	Prva Bošnjačka gimnazija Sarajevo	0	0	1.65	0	0	0.1	4	5.75
Namik Hadžović	Druga gimnazija Sarajevo	0.4	0.7	1.95	0	0	0.4	2	5.45
Amalija Mustapić	Gimnazija fra Grge Martića Mostar	0	0	1.35	0	0	0	0.5	1.85
Harun Dervić	MŠŠ Travnik	0.1	0	0	0	0	0	0	0.1