БХ ОЛИМПИЈАДА ФИЗИЧАРА 2022

БИЛТЕН

14.05.2022.

УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДР. МЛАДЕНА СТОЈАНОВИЋА 2
78 000 БАЊА ЛУКА
ТЕЛЕФОН: +387 51 319 142
ВЕБ-САЈТ: www.pmf.unibl.org

Организатори

Природно-математички факултет у Бањој Луци

Републички педагошки завод Републике Српске

Друштво физичара у Федерацији Босне и Херцеговине

Чланови такмичарске комисије за припрему и преглед задатака

Бојан Ковачевић, предсједник

Бењамин Фетић

Абдулах Јашаревић

Мухамед Соколовић

Драган Марковић

Билтен припремио: Бојан Ковачевић

Посебну захвалност исказујемо члановима организационог одбора СП Физика Природно-математичког факултета у Бањој Луци:

Сњежани Дупљанин

Драгани Маливук Гак

Бојану Ковачевићу

Јелени Рашовић

Милану Поповићу

Сандри Торбици

Александару Ђургузу

Валентини Бошковић

као и члановима такмичарске комисије и свима онима који су са ентузијазмом узели учешће у организацији.


DOBRO DOŠLI!
SP fizika, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Banjoj Luci


OLIMPIJADA
FIZIČARA BIH
2022
DRŽAVNO TAKMIČENJE IZ FIZIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
BANJA LUKA, PMF
14. MAJ 2022.


OLIMPIJADA
FIZIČARA BIH
2022
BANJA LUKA, PMF
14. MAJ 2022.
Home
Tools
SP FIZIKA,
PMF BANJA LUKA


OLIMPIJADA
FIZIČARA BIH
2022
BANJA LUKA, PMF
14. MAJ 2022.


OLIMPIJADA
FIZIČARA BIH
2022
BANJA LUKA, PMF
14. MAJ 2022.
SP FIZIKA,


ULAZ

ПРОГРАМ ТАКМИЧЕЊА

8:30-9:00	Регистрација учесника
9:00-9:45	Свечано отварање такмичења
9:45-10:00	Припрема ученика за почетак такмичења и подјела задатака
10:00-14:00	Израда задатака
14:00h-14:30	Ручак
14:30-16:30	Прегледање и бодовање
16:30	Прелиминарни резултати
16:30-17:30	Жалбе ученика
17:30	Званични резултати
18:00	Свечано затварање такмичења и подјела диплома

ПОСТЕР

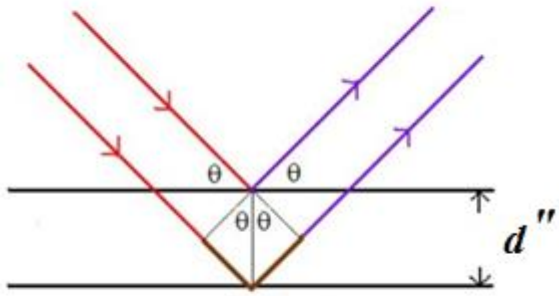
ЗАДАЦИ

1.Задатак (25 бодова)

У овом задатку бавићемо се појавом дифракције и у дијелу задатка под А) и под Б) при чему су дијелови задатка под А) и Б) међусобно независни.

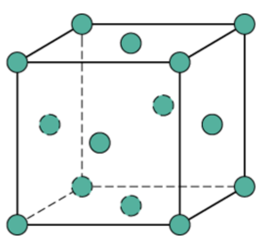
А) Свјетлост која се састоји од двије монохроматске компоненте таласних дужина λ и λ' упада окомито на дифракциону решетку константе $d = 1{,}7\ \mu\text{m}$, те се посматрају максимуми дифракције (са исте стране средишњег максимума) на припадним угловима α_n и α_m'. Са α_n су означени углови који одговарају дифракционим максимумима реда n свјетлости таласне дужине λ, док су са α_m' означени углови који одговарају дифракционим максимумима реда m свјетлости таласне дужине λ'. Мјерењима је утврђено да вриједи $\alpha_2 - \alpha_1' = 8°$, те $\alpha_3 = \alpha_2'$. Из ових услова одредите λ и λ'. Не користити апроксимативни рачун.

Б) Зраци таласне дужине λ'', коју треба одредити у овом дијелу задатка, падају на узорак од поликристалног алуминијума под браговским углом $\theta_1 = 15{,}2°$ првог реда (максимум,појачање) при чему се дифрактовање врши са равни (1 1 1). Алуминијум кристалише у површински центрирану кубну решетку (ПЦК). За овакав тип решетке растојање између сусједних *(h k l)* равни рачуна се према формули $d'' = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$, гдје је a дужина ивице елементарне ћелије, а $(h\ \ k\ \ l)$ су Милерови индекси.

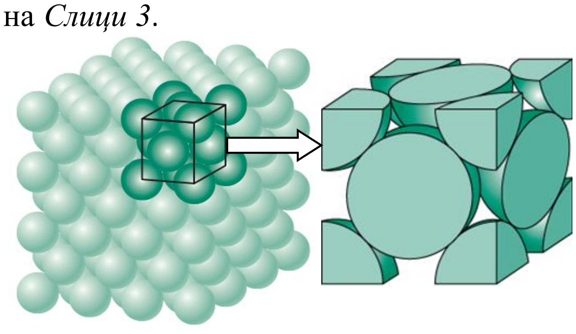


Слика 1. Брагова дифракција

Елементарна ћелија ПЦК решетке приказана је на *Слици 2*. Ову ћелију чине јони у облику сфере полупречника $r = 0.118\ \text{nm}$ распоређени у тјеменима коцке и на средини бочних страна. Разматрање вршити у моделу густог паковања по коме су јони представљени тврдим сферама које се додирују на начин као на *Слици 3*.

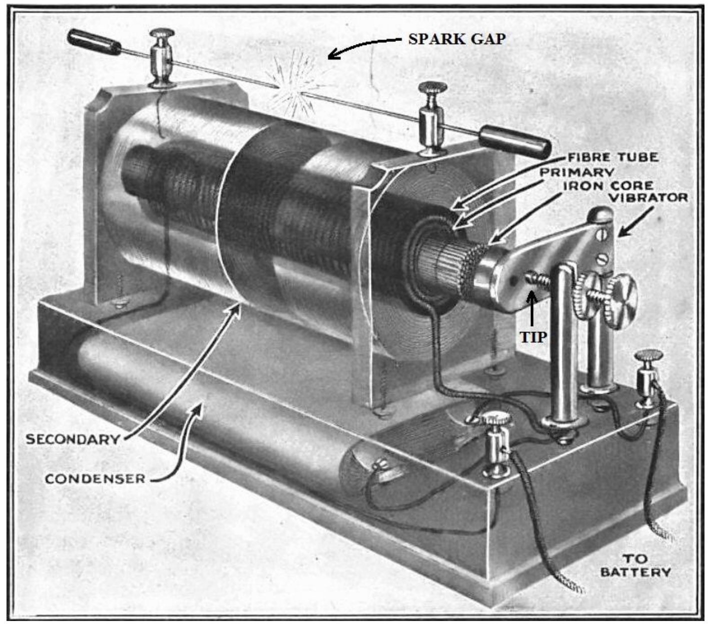


Слика 2. Елементарна ћелија ПЦК



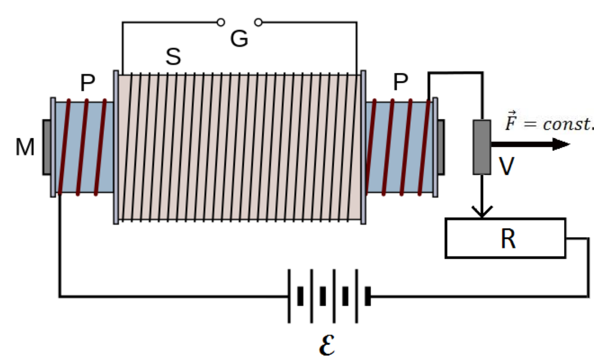
Слика 3. Модел густог паковања ПЦК

2. Задатак (25 бодова)



На слици је приказана тзв. *Ruhmkorffova* завојница која је крајем 19. стољећа кориштена као основни извор веома високог напона. Име је добила према њемачком иноватору *Heinrich Ruhmkorffu* (1803.-1877.) који је комерцијализовао производњу овог патента. *Ruhmkorffova* завојница је уствари један велики трансформатор, чији примар садржи релативно мали број намотаја (неколико десетина или стотина), док секундар садржи и до милион намотаја. На тај се начин од ниског напона на примару (реда 5V) добијао висок напон на секундару (реда 100 kV). Напон који се добијао на секундару се у почетку рачунао из дужине искре између два шиљка (на слици означено са „Spark gap“) спојена на секундар.

Једини проблем је био што за рад трансформатора треба извор наизмјеничног напона, а у то вријеме извори наизмјеничног напона су били веома ријетки. Морао се развити механизам помоћу којег се од извора истосмјерног напона добија наизмјенични напон. Управо у идеји рада овог механизма лежи генијалност *Ruhmkorffove* завојнице. Наиме, користио се тзв. вибрациони прекидач (на слици „Vibrator“). Принцип рада вибрационог прекидача је сљедећи. У тренутку када се уређај споји на извор истосмјерног напона (нпр. батеријом) вибрациони прекидач остварује контакт са металним врхом (на слици „Tip“) и затвара се струјни круг. Струја која тада пролази кроз примар ствара магнетно поље у жељезном језгру (на слици „Iron core“) примара и тим магнетним пољем себи привлачи вибрациони прекидач. Вибрациони прекидач се тада одваја од металног врха, прекида се струјни круг и више нема магнетне силе која би привлачила вибрациони прекидач. Вибрациони прекидач се онда усљед еластичне силе враћа у почетни положај у којем додирује метални врх, поново се затвара струјни круг и процес иде од почетка. На овај начин се ствара промјенљива струја, односно промјенљиви напон на примару.



Један једноставан модел *Ruhmkorffove* завојнице је приказан на слици десно. Циљ овог задатка јесте да се одреди фреквенција добијеног наизмјеничног напона на примару.

Секундар ћемо скроз занемарити, као и индуктивност примара. Еластичну силу смо моделирали константном силом F=1,67 N. Потенциометар има укупни отпор R=15 Ω, његова дужина је L=2 cm, а лијеви крај му се поклапа са десним крајем жељезног језгра примара. Батерија има напон E=12 V.

а) Наћи израз за струју I која пролази кроз коло примара када се вибрациони прекидач V налази на удаљености x од десног краја жељезног језгра примара. Резултат изразити преко E, L, R и x.

б) Написати израз за магнетну индукцију B примара на мјесту вибрационог прекидача. Показује се да је магнетна индукција у близини краја завојнице приближно једнака половини магнетне индукције у центру завојнице. Наравно, узети да је вибрациони прекидач веома близу краја примара, тј. да је $x \ll L$. Број намотаја по јединици дужине примара је $n=1000\ m^{-1}$, релативна магнетска пермеабилност жељеза је $\mu_r = 5000$, а магнетска пермеабилност вакуума је $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A.

в) Написати израз за укупну силу која дјелује на вибрациони прекидач, ако магнетно поље дјелује силом $F_m = cB$ на вибрациони прекидач, гдје је B магнетна индукција на мјесту вибрационог прекидача, а c константа пропорционалности која зависи од материјала и димензија вибрационог прекидача, а за наш вибрациони прекидач износи c=0,63 N/T.

г)Одредити равнотежни положај x_0 вибрационог прекидача. Да ли је оправдана претпоставка $x \ll L$?

д) Израчунати фреквенцију осцилација вибрационог прекидача ако је маса вибрационог прекидача m=5g. За $x \ll L$ и реалан број n можете користити апроксимацију

$(1 \pm x/L)^n \approx 1 \pm n\, x/L$.

3. Задатак (25 бодова)

Опћенито, стварни проблеми из механике флуида су изузетно сложени, узимају у обзир вискозност флуида и турбуленцију, те се рјешавају преко тзв. *Navier-Stokesovih* једначина. Ове једначине су толико тешке за ријешити да их је 2000. године *Clay Institut* у Сједињеним Америчким Државама прогласио „миленијским проблемом” (*eng.millennium problem*). Ко год нађе аналитичко рјешење добива као награду милион $! Дан данас нико није успио покупити награду.

Опће рјешење једначина механике флуида је задатак за математичаре. Нас као физичаре обично више занимају посебни случајеви. У овом задатку ћемо се бавити једним посебним случајем протока идеалног флуида око бесконачно дугог цилиндра. Циљ ће нам бити егзактно одредити проток флуида.

Ојлеров флуид (*L.Euler*)

Швицарски математичар и физичар *L. Euler* је 1757. Године формулисао једначине које описују проток идеалног флуида. Идеалним флуидом сматрамо некомпресибилни флуид ($\rho = const.$), чија је вискозност $\eta = 0$. Показао је да за поље брзине вриједе *Maxwellove* једначине у електростатици, уз одређен фактор пропорционалности.

$$\vec{v} = \gamma \vec{E} \qquad (1)$$

i) Покажите да за вектор брзине некомпресибилног флуида вриједи аналогија са *Gaussovim* законом електростатике у вакууму.

Поред важења *Gaussovog* закона, *Euler* је показао да за поље брзине вриједи сљедећа релација:

$$\oint \vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \qquad (2)$$

Релацију (2) можемо протумачити на сљедећи начин: Интеграл поља брзине флуида (струјница) по било којој затвореној петљи је увијек једнак нули. Ова релација је од изузетног значаја јер употпуњава аналогију између поља брзине и електричног поља. На основу ове релације, могуће је дефинисати такозвану функцију „потенцијала брзине“ Ф.

Слично како бисмо у електростатици из потенцијала V добили E поље као:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \quad (3)$$

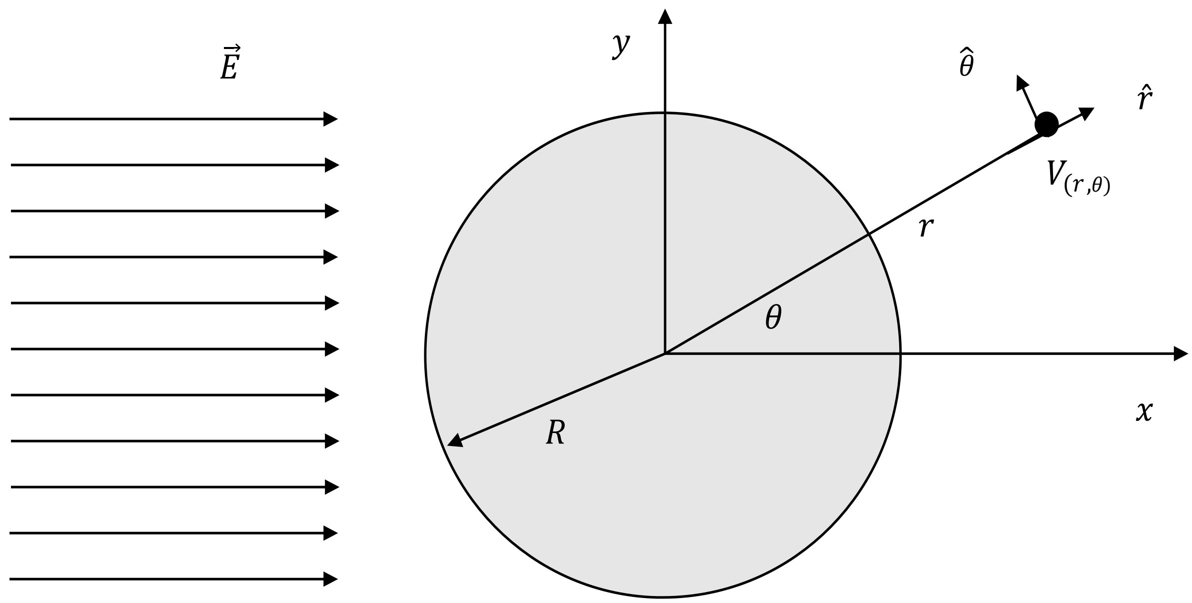
гдје су i,j,k јединични вектори за x,y и z осе.

Брзину протока флуида *v* можемо добити из потенцијала брзине као:

$$\vec{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k} \qquad (4)$$

Обратите пажњу на то да је једина разлика између (3) и (4) предзнак. Позитивни предзнак за поље брзине је ствар конвенције.

У наставку задатка ћемо се бавити протоком идеалног флуида око цилиндра радијуса R. Како бисмо ријешили овај проблем, прво ћемо одредити потенцијал проводног цилиндра у E пољу. На слици 1 је приказан идеално проводни, бесконачно дуги цилиндар радијуса R, постављен у хомогено електрично поље. Ради симетрије проблема, згодно је користити цилиндрични координатни систем: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.



Слика 1. Проводни цилиндар у хомогеном E пољу

Прије него што одредимо потенцијал ван проводног цилиндра, бити ће згодно да одредимо електрично поље хомогено запремински наелектрисаног цилиндра у вакууму.

ii) Одредите електрично поље $E_{(r,\theta)}$ унутар и ван хомогено запреминског наелектрисаног цилиндра густоће набоја ρ и радијуса R.

Сада, пређимо натраг на оригинални проблем:

iii) Изведите да је потенцијал ван проводног цилиндра, узрокован само од цилиндра, дат као:

$$V_{(r,\theta)} = \frac{\alpha}{r} cos\theta \quad (5)$$

Гдје је α константа која овиси од R и E, те одредите α.

Хинт: Може вам бити од користи израз: $\ln(1+x) \approx x$, за $x \ll 1$

Напомена: За дио iii) НЕЋЕ бити прихваћено рјешење гдје у почетку претпоставите потенцијал облика (5) и само провјерите да ли је тачно на границама. Морате израз (5) извести од основних принципа.

На основу израза (1), можемо тврдити да релација (5) такођер вриједи за потенцијал брзине који ствара цилиндар:

$$\Phi_{(r,\theta)} = \frac{\alpha}{r} cos\theta \quad (6)$$

Пошто је функција $\Phi_{(r,\theta)}$ дата у поларним координатама, израз (4) морамо модифицирати:

$$\overrightarrow{v_{(r,\theta)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\hat{\theta} \quad (7)$$

iv) Користећи изразе (6) и (7) одредите егзактно рјешење за проток флуида око цилиндра. Одредите α тако да задовољава граничне услове протока (ако сте већ у дијелу иии одредили α , само провјерите валидност на границама). Скицирајте проток око цилиндра, те назначите све тачке у простору гђе ће укупна брзина протока бити 0 (тзв. „тачке стагнације“).

Када се тијело креће кроз текућину, неки дио текућине око тијела се такођер мора кретати. Када се тијело убрзава, морати ће и неки дио околне текућине. Дакле, за убрзање тијела се мора уложити додатна сила, како би се убрзао околни флуид. Пошто је F=ma, можемо увести појам ефективне масе околног флуида.

Ако се тијело креће брзином в, ефективну масу флуида је најлакше дефинисати као:

$$m_{eff} = \frac{2E_K}{v^2} \quad (8)$$

Гдје је E_K укупна кинетичка енергија флуида.

v) Одредите ефективну масу m_{eff} по јединици дужине за бесконачно дуги цилиндар радијуса R, који се креће константном брзином v кроз идеални (*Eulerov*) флуид густоће ρ.

Хинт: Можете узети да је константа пропорционалности у изразу (1) једнака: $\gamma = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

4. Задатак (25 бодова)

У свакодневном животу, велики број материјала као што су столови, стакла, разни метали на микроскопској скали изгледају равно и глатко (тј.без несавршености). Међутим, ситуација није баш таква микроскопски. Постоје разне несавршености по материјалу, које су узрок недовољне прецизности машина које се користе за производњу одређених материјала. Овакве структуре нису заправо необичне, оне су заправо енергетски повољне конфигурације за неке кристале. Посматраћемо конкретно шта се дешава када тијело иде уз стрму раван, моделирану као степенице.

а) Изведите израз за снагу, P_0 потребну мотору аутомобила која је потребна да би се аутомобил могао кретати уз стрму раван константном брзином. Маса аутомобила је M, гравитационо убрзање је g, угао стрме равни је α, коефицијент трења између точкова и стрме равни је μ.

У наставку задатка узмите у обзир ове појмове и претпоставке:

- Вертикални и хоризонтални ход. Вертикални ход је разлика висина између двије степенице, док је хоризонтални ход хоризонтална дужина једне степенице. За хоризонтални ход користимо d , док за вертикални h.
- Угао степеница. Угао степеница природно дефинишемо као $\alpha = arctg\left(\frac{h}{d}\right)$.
- Ивица степеница. Мјесто транзиције степенице гдје се d и h срећу.
- Трење у свакој тачки је исто и једнако μ (укључујући и ивице степеница).
- Брзина аутомобила је константна и нема губитака енергије у виду топлотне енергије и сл.
- Нема губитка импулса при преласку са једне степенице на другу.

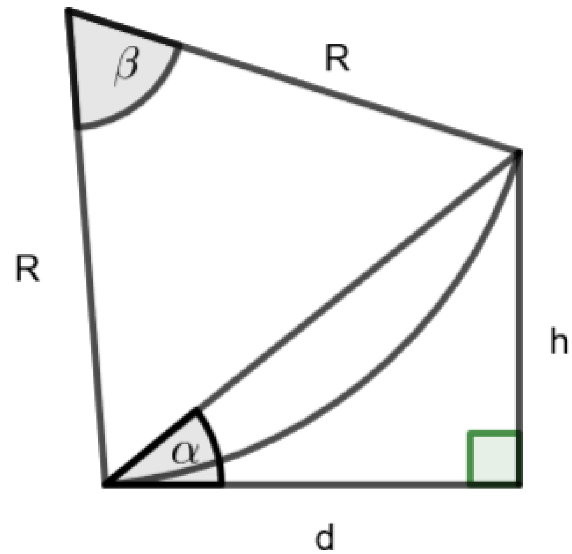
Прије наставка задатка уводимо још једну варијаблу која ће вам помоћи да ријешите задатак. Дефинишемо као β централни угао точка који се налази на степеници (види слику 1). У наставку ће вам бити потребно да је познат и полупречник точка R.

б) Одредите β у зависности од d, h, R, α.

Да бисмо мало поједноставили проблем, посматраћемо само кретање точка уз степенице масе m. Зашто је ово оправдано?

в) Идентификујте силе битне за израчунавање (средње) снаге, те њихове одговарајуће балансе.

г) Коначно одредите аналитички облик снаге потребне да се аутомобил креће константном брзином по степеницама.



Слика 1: Основни елементи-једна степеница

д) У ком опсегу β, за фиксно R, узима вриједност? Израчунајте $\Delta P = P_0 - P_{stepenica}$ за нумеричке вриједности: $M = 2000kg, g = 9{,}8\frac{m}{s^2}, \mu = 0{,}2, v = 20\frac{m}{s}, R = 80cm, \alpha = \frac{\pi}{6}$ и три вриједности β: $\beta_1 = 1°$, $\beta_2 = 60°$ и $\beta_3 = 100°$.

ђ) Пронађите релацију којом се одређује екстремална вриједност снаге. На основу дијела д) закључите каква је то екстремална вриједност.

е) Коначно образложите зашто „ефекат степеница“ није уочљив у свакодневном животу. Квалитативно опишите однос између R, d и h.

Математичке помоћи:

- $sinx \approx x, cosx \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \ln(1+x) \approx x, x \to 0$
- Средња вриједност неке величине се израчунава као:
$$\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \langle P(t) \rangle$$
- $tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\alpha \pm tan\beta}{1 \mp tan\alpha\, tan\beta}$
- $\int tan(x)\, dx = -ln|cosx| + C$
- Могуће је да у сваком дијелу неће бити потребне све величине наведене у тексту.

РЈЕШЕЊА

1.Задатак

А) Једначина која одговара дифракционим максимумима упадне монохроматске свјетлости таласне дужине λ је $dsin\alpha_n = n\lambda$ (*), док је за упадну монохроматску свјетлост таласне дужине λ' једначина $dsin\alpha_m{}' = m\lambda'$ (**) **.**

Дијељењем једначине(*) са (**) уз вриједности $n = 3$ и $m = 2$, те услов $\alpha_3 = \alpha_2{}'$ добија се однос таласних дужина $\frac{dsin\alpha_3}{dsin\alpha_2{}'} = \frac{3\lambda}{2\lambda'} \Longrightarrow 1 = \frac{3\lambda}{2\lambda'} \Longrightarrow 3\lambda = 2\lambda'$.

Дијељењем једначине (*) са (**) уз вриједности $n = 2$ и $m = 1$, те услов $\alpha_2 - \alpha_1{}' = 8°$

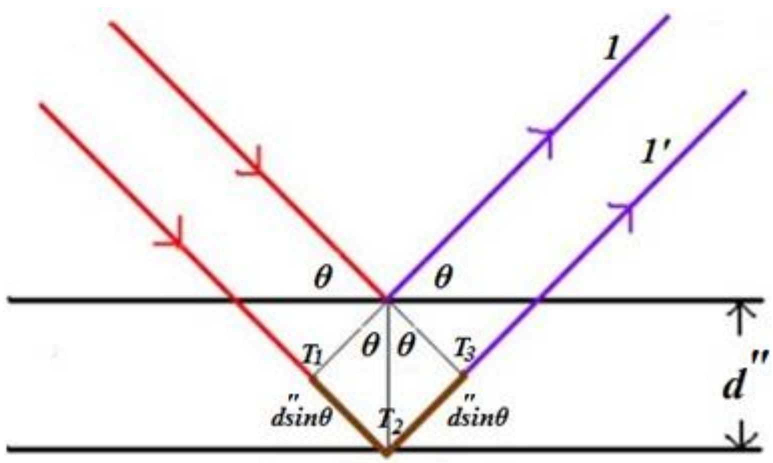
добија се $\frac{dsin\alpha_2}{dsin\alpha_1{}'} = \frac{2\lambda}{\lambda'}$ што уз услов $3\lambda = 2\lambda'$даје $\frac{sin(\alpha_1{}'+8°)}{sin\alpha_1{}'} = \frac{4}{3}$ **.**

На основу примјене тригонометријског идентитета $sin(x + y) = sinx\, cosy + cosx\, siny$ слиједи

$$\frac{sin\alpha_1{}'cos8° + cos\alpha_1{}'sin8°}{sin\alpha_1{}'} = \frac{4}{3} \Longrightarrow cos8° + ctg\alpha_1{}'sin8° = \frac{4}{3} \Longrightarrow \alpha_1{}' = 22{,}1°.$$

Сада се могу одредити таласне дужине $\lambda' = dsin\alpha_1{}' = 639{,}6$ nm**,** $\lambda = 426{,}4$ nm**.**

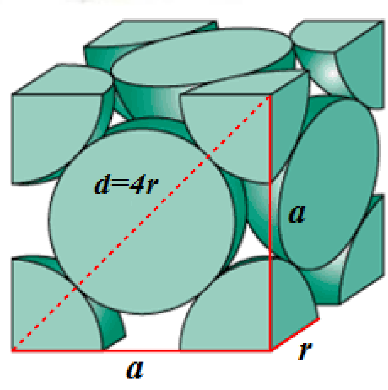
Б) Да би дошло до појачања снопова 1 и 1' њихова путна разлика $\Delta S = T_1T_2T_3 = d''sin\theta + d''sin\theta = 2d''sin\theta$ треба да је једнака цјелобројном умношку таласних дужина:



$2d'' \sin\theta = t\lambda''$**,**

$2d'' \sin\theta_1 = \lambda'', t = 1$ **.**

Да бисмо одредили растојање између равни $d'' = \frac{a}{\sqrt{3}}$, потребно је одредити дужину ивице елементарне ћелије. Ивица елементарне ћелије износи $a = \frac{4r}{\sqrt{2}}, a = 0{,}33375$ nm па је $d'' = 0.192919$ nm $\Longrightarrow \lambda'' \approx 0{,}1$ nm **.**



2. Задатак

Како је удаљеност вибрационог прекидача од десног краја жељезног језгра примара једнака џ, то је дужина дијела потенциометра који учествује у колу примара једнака $L - x$. Из односа дужине тог дијела потенциометра и дужине читавог потенциометра, добијемо да је отпор дијела потенциометра коју учествује у колу примара једнак $R_x = \frac{L-x}{L}R$. Како се по услову задатка индуктивност примара занемарује, струја која пролази кроз примар је дата изразом

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_x} = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{L}{L-x}.$$

а) Магнетна индукција у центру примара је дата $B_c = \mu_0 \mu_r n I$ па је у близини краја примара (на мјесту вибрационог прекидача) магнетна индукција приближно једнака

$$B \approx \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n I = \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{L}{L-x}.$$

б) Магнетна сила на вибрациони прекидач је једнака

$$F_m = cB = \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n c \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{L}{L-x}.$$

Како на вибрациони прекидач поред магнетне силе дјелује и константна еластична сил F, то је укупна сила на вибрациони прекидач једнака:

$$F_u = F - F_m = F - \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n c \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{L}{L-x}.$$

в) Равнотежни положај се налази на мјесту у којем је укупна сила једнака нули. Дакле, једначина за x_0 је

$$F - \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n c \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{L}{L-x_0} = 0$$

одакле добијемо

$$x_0 = L\left(1 - \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n c \frac{\mathcal{E}}{R \cdot F}\right).$$

Уврштавањем бројчаних вриједности, за положај равнотеже добијамо $x_0 = 1{,}04\ mm$. Пошто је x_0 скоро двадесет пута мање од L, апроксимација $x \ll L$ је заиста оправдана.

г) Израз за укупну силу може се записати на сљедећи начин

$$F_u = F - \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n c \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{L}} = F - \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r n c \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-1}.$$

Кориштењем апроксимације $\left(1-\frac{x}{L}\right)^{-1} \approx 1+\frac{x}{L}$ израз за укупну силу се своди на

$$F_u \approx \left[F - \frac{1}{2}\mu_0\mu_r nc\frac{\mathcal{E}}{R}\right] - \frac{1}{2}\mu_0\mu_r nc\frac{\mathcal{E}}{RL}x.$$

Први дио израза (дио у заградама) је одговоран само за помак у равнотежном положају, док је други дио израза (пропорционалан ц) одговоран за осцилације вибрационог прекидача. Видимо да се вибрациони прекидач понаша као линеарни хармонијски осцилатор ефективне константе еластичности $k_{ef} = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r nc\frac{\mathcal{E}}{RL}$. Фреквенција овог осцилатора је сада дата изразом

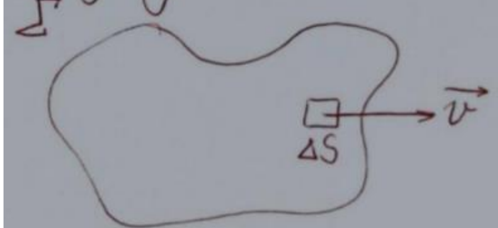
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{ef}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r nc}{2m}\cdot\frac{\mathcal{E}}{RL}}.$$

Уврштавањем бројчаних, за фреквенцију вибрационог прекидача добијемо приближно $f \approx 20\ Hz$. Ово је уједно и фреквенција наизмјеничног напона и струје на примару.

3. Задатак

Рјешење задатка 3:

I) Конструишимо произвољну површ унутар флуида.



Масени проток кроз малу површину ΔS можемо написати као: $\rho \Delta S v$. Укупни масени проток добијамо као суму, односно интеграл по произв. површини:

$$Q_M = \oiint_\Sigma \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (0{,}5п)$$

Пошто је флуид некомпресибилан, можемо ρ извући испред интеграла. Из закона очувања масе, (1п) укупни флукс масе је једнак 0. Даље, коначно добијамо:

$$\oiint_\Sigma \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (0{,}5п)$$

$\Rightarrow$ Ово је аналогно Гаусовом закону у вакууму $\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ (0,5п)

II)

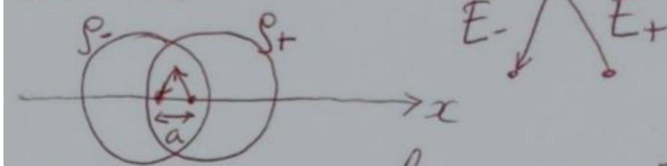
$r<R$: $E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho r^2 \pi l}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$, тј. $\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$; $\underline{\underline{\vec{r} = r\hat{r}}}$ (1,5п)

$r>R$: $E \cdot 2\pi r l = \frac{\rho R^2 \pi l}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}\hat{r} \quad (1,5П)$$

III) Неутрални проводни ваљак можемо посматрати као суперпозицију 2 наелектрисана ваљка (3П) и то једног са $+\rho$ и другог са $-\rho$ густине наелектрисања.
Када $\vec{E}$ почне дјеловати на овај систем, доћи ће до поларизације центри ваљака ће се раздвојити за нeко мало a.



Са слике се види да ће резултујуће E поље унутар региона преклапања бити константно. Из дијела II):

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r} \ (2П), \quad \vec{E}_- = -\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\vec{E}_{(r<R)} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{x},$$

За веома мале a, овај регион преклапања ће приближно бити исти као регион само једног ваљка.

Из Гаусовог закона за проводник, знамо да укупно E поље унутар проводника мора бити 0 (1п). Одатле можемо написати

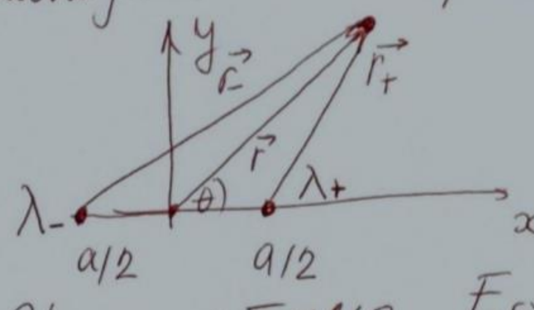
$\vec{E} = \frac{+\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ (0,5п), $\rho a = 2\varepsilon_0 E = const.$ гдје је E вањско хомогено поље.

Овдје ће бити згодно да уведемо појам тзв. линијске густине наелектрисања коју ћемо деф. као

$$\lambda \equiv \rho R^2 \pi$$

$$\Rightarrow \lambda a = 2\pi\varepsilon_0 E R^2 = const.$$

У горњем изразу λa представља електр. диполни моменти p_{2D} у 2 димензије. Систем можемо представити као 2 линијска наелектрисања на растојању a.



$$\left.\begin{aligned} r_+^2 &= y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \\ r_-^2 &= y^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\} (0{,}25п)$$

Искористимо $E_{r \geq R}$ из претх. дијела задатка да бисмо добили V једног линијског наелектрисања на растојању r.

$$V_{r\geq R} = -\int E(r)\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{C}\ (0{,}5\text{п})$$ гдје

је C константа интеграције.

Укупни потенцијал добијамо принципом суперпозиције

$$V(r) = V_+(r) + V_-(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_+}{C} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_-}{C}$$

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\ln\frac{r_+}{C} + \ln\frac{r_-}{C}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_-}{r_+}\ (1{,}5\text{п})$$

Овдје користимо идентитет

$$\ln(x^2) = 2\ln x \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2)$$

$$\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2 = \ln\left(\frac{y^2+x^2+ax+\frac{a^2}{4}}{y^2+x^2-ax+\frac{a^2}{4}}\right) \approx \ln\left(1+\frac{2ax}{y^2+x^2}\right)$$

Користећи апроксимацију дату у задатку добија се

$$\ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2 \approx \frac{2a\cos\theta}{r}\ (1\text{п})$$

Коначно је:

$$V(r) = \frac{ER^2\cos\theta}{r}\ (1\text{п})$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = ER^2}$$

IV) Како је $\Phi = \frac{\alpha}{r}\cos\theta$ $(\alpha = vR^2)$, брзину коју производи сам цилиндар (не укључујући вањски проток) рачунамо као:

$$\vec{v} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2}\cos\theta \ (0{,}1П) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\alpha}{r^2}\sin\theta \ (0{,}1П)$$

За хомогени проток је:

$$\vec{v}_0(r,\theta) = v\cos\theta\,\hat{r} - v\sin\theta\,\hat{\theta} \ (1П)$$

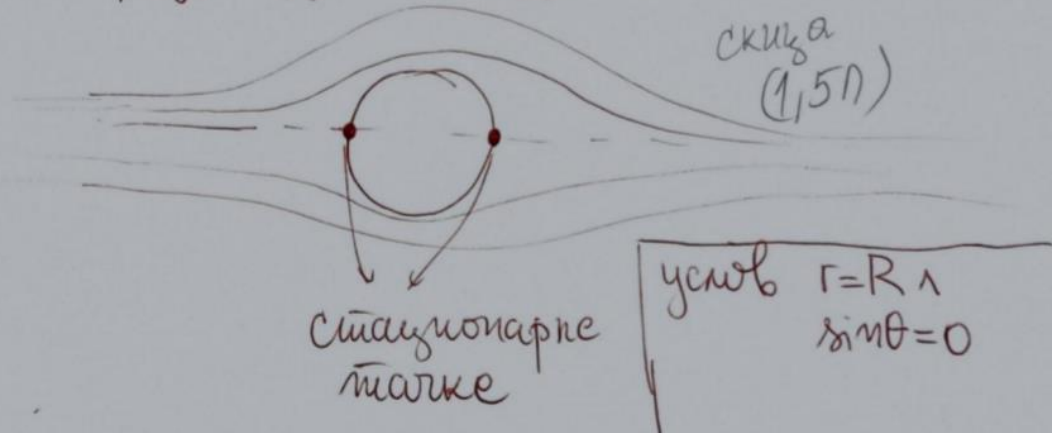
Укупни проток добијамо као суму:

$$\vec{v}_u(r,\theta) = v\cos\theta\left(1-\frac{\alpha}{vr^2}\right)\hat{r} + v\sin\theta\left(-\frac{\alpha}{vr^2}-1\right)\hat{\theta}$$

За $r=R$, гранични услов је $v_r = 0$ (0,5П) како флуид не улази у чврсто тијело. Одатле добијамо

$$1-\frac{\alpha}{vR^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = vR^2} \ (0{,}3П)$$

Што потврђује рјешење дијела III).



V) Рад рачунамо као

$$dA = q E dx \iff dA = \lambda l E dx$$

$$\frac{dA}{l} = \lambda E dx = E dp_{2D}$$

$$\frac{dA}{l} = 2\pi \varepsilon_0 R^2 E dE$$

$$A = \int \frac{dA}{l} = \int 2\pi \varepsilon_0 R^2 E dE = \pi \varepsilon_0 R^2 E^2 \quad (2{,}5П)$$

Ово је енергија по јед. дужине 2D дипола.
Она је једнака збиру вањске и унутрашње кин. енергије по јед. дужине

$$A_{in} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} R^2 \pi \quad (1{,}5П)$$

$$\frac{A_{out}}{l} = A - A_{in} = \frac{\varepsilon_0 R^2 \pi E^2}{2} \quad (0{,}5П)$$

Смјена $E^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} v^2 \Rightarrow \frac{E_k}{l} = \frac{\rho R^2 \pi v^2}{2}$

Коначно

$$\boxed{\frac{m_{eff}}{l} = \frac{2 \frac{E_k}{l}}{v^2} = \rho R^2 \pi} \quad (0{,}5П)$$

4. Задатак

а) Јасно је да је

$$P_0 = Fv = (Mgsin\alpha + \mu Mgcos\alpha)v = Mgv(sin\alpha + \mu cos\alpha) \qquad \mathbf{0.5п} \tag{1}$$

б) Овај дио је чисто геометријски тако да се позивамо на слику. Са слике очитавамо:

$$\frac{\sqrt{h^2+d^2}}{2R} = sin\frac{\beta}{2} \tag{2}$$

$$\vee \quad h^2 + d^2 = R^2 + R^2 - 2R^2cos\beta \Rightarrow \frac{h^2+d^2}{2R^2} = 1 - cos\beta \qquad \mathbf{0.3п} \tag{3}$$

Оправдање посматрања само точка јесте што је аутомобил круто тијело , те је свеједно који његов дио узимамо за анализу **0.2п**. Точак је наилустративнији.

ц) Релевантне силе (слика 2) које треба да размотримо су: Сила мотора, сила земљине теже, силе реакције подлоге на ивицама, као и силе трења. Могуће је расписати једначине за све силе, но како ћемо касније тражити само снагу, сила реакције у доњој ивици нам није битна, како смо рекли да нема наглог мијењања импулса и сл. Самим тиме, посматраћемо ситуацију као да је точак за $\epsilon > 0$ издигнут изнад ивице и тада написати балансе сила. (Такмичар може да распише све једначине баланса, но оне неће бити релевантне већ у сљедећем дијелу. Одузети **0.5п**, ако такмичар сматра ове силе за релевантне.) **1п** Даље поступамо мање-више праволинијски. Све силе ћемо разложити као на слици:
Одатле слиједе сљедеће једначине:

$$F - N cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) - F_{tr}cos\frac{\beta}{2} - Mgcos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 0 \qquad \mathbf{1.5п} \tag{4}$$

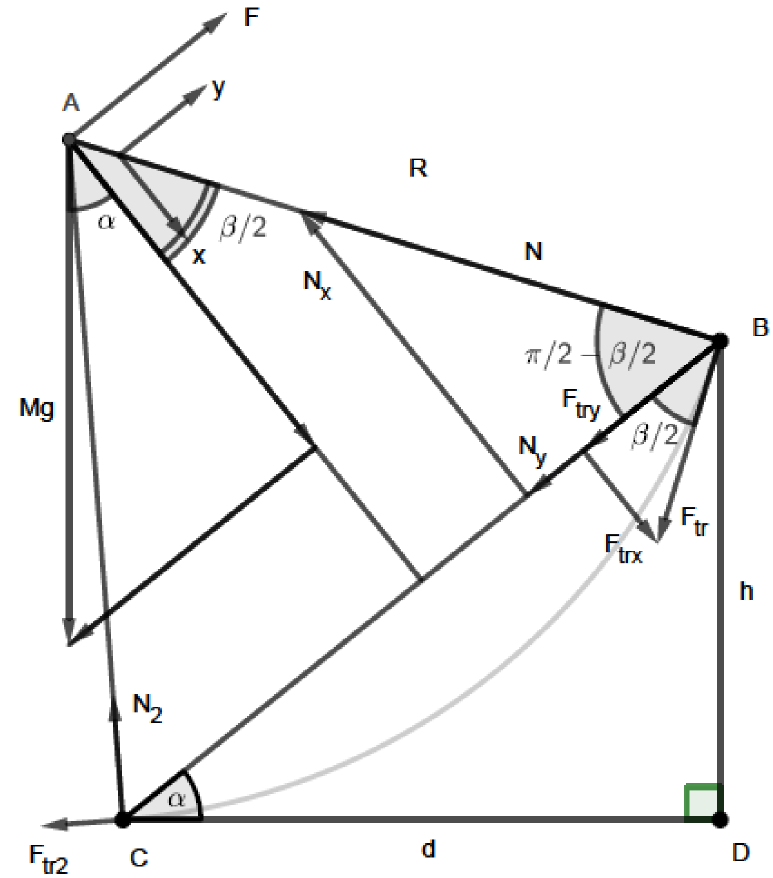
$$Mgcos\alpha - N sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) + F_{tr}sin\frac{\beta}{2} = 0. \qquad \mathbf{1.5п} \tag{5}$$

Заједно са једначином $F_{tr} = \mu N$, добија се:

$$F = Mg\left(\sin\alpha + cos\alpha\frac{\mu cos\frac{\beta}{2} + sin\frac{\beta}{2}}{cos\frac{\beta}{2} - \mu sin\frac{\beta}{2}}\right) \qquad \mathbf{1п} \tag{6}$$

д) Са слике 2, јасно је да F зависи од угла између дужи AB и BC у току времена. Нека је тај угао x. Тада се горњи израз лако модификује са $\frac{\beta}{2} \to \frac{\beta}{2} - x$. Дакле, потребно је интегралити дати израз. Интегралићемо по једном периоду. Дакле који угао пребрише, центар точка док се аутомобил нађе у истој конфигурацији (транслираној за једну степеницу). То једноставно можемо да утврдимо, као угао за који се заротира дуж AB (слика 2). То је управо по дефиницији угао β. Узимајући да се аутомобил креће константном брзином v, то центар масе точка $v = \omega R = \frac{\beta}{T}R$, и $\omega = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \omega dt$.**1п**

$$< P(t) >= \frac{v}{\beta R}\int_0^\beta \frac{1}{\omega}P(x)dx = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta Mg\left(\sin\alpha + cos\alpha\frac{\mu cos(\frac{\beta}{2} - x) + sin(\frac{\beta}{2} - x)}{cos(\frac{\beta}{2} - x) - \mu sin(\frac{\beta}{2} - x)}\right)vdx. \qquad \mathbf{2.5п} \tag{7}$$



Slika 2: Релевантне силе и углови

Први интеграл је једноставан:

$$\frac{1}{\beta}\int_0^\beta Mgv\sin\alpha dx = Mgvsin\alpha\frac{\beta}{\beta} = Mgvsin\alpha. \qquad \mathbf{0.5п} \tag{8}$$

За други интеграл треба да будемо мало домишљати, конкретно посматрајмо интеграл:

$$\int_0^\beta \frac{\mu cos(\frac{\beta}{2}-x)+sin(\frac{\beta}{2}-x)}{cos(\frac{\beta}{2}-x)-\mu sin(\frac{\beta}{2}-x)}dx = \int_0^\beta \frac{\mu + tan(\frac{\beta}{2}-x)}{1-\mu tan(\frac{\beta}{2}-x)}dx = \int_0^\beta tan(arctan\mu+\frac{\beta}{2}-x)dx. \qquad \mathbf{3.5п} \tag{9}$$

Ово је сада таблични интеграл и њега лако рјешавамо. Коначно израз за средњу снагу је:

$$< P >= Mgvsin\alpha - \frac{1}{\beta}Mgvln\left|\frac{1-\mu tan\frac{\beta}{2}}{1+\mu tan\frac{\beta}{2}}\right|cos\alpha. \qquad \mathbf{2.5п} \tag{10}$$

е) Уз мало геометрије видимо да је максимално $\beta = \frac{\pi}{2}$, како повећавање h, не може то промијенити (гранични случај $h = d = R$), самим тим β_3 не долази у обзир за рачун. **1п** Самим уврштавањем у формулу добија се: $\Delta P_1 = -1.8W, \Delta P_2 = -7.3kW$ **0.5+0.5п**

ф)Основни услов је $\frac{d<P>}{d\beta} = 0$. **0.5п** Рачуном се добија неки веома компликован израз који генерално нема ни локални ни глоблани минимум (максимум). Међутим, може се примијетити да за $\beta \to 0$, је испуњено $\frac{d<P>}{d\beta} \to 0$. **1п** На основу прошлог дијела јасно је да се ради о минималној вриједности снаге за $\beta = 0$ **0.5п** јер се разлика ΔP смањила са повећањем угла, тј. снага се повећала.**0.5п**

г) Дакле, када се вратимо на само поставку задатка, на макроскопском нивоу, површине изгледају равно, самим тим закључујемо $R >> h, d$, дакле: $\beta \to 0$. **0.5п** Сада можемо да развијемо јну (10) у ред око нуле да видимо шта се добија:

$$\lim_{\beta \to 0} < P >= Mgvsin\alpha - \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} Mgvln\left|\frac{1 - \mu tan\frac{\beta}{2}}{1 + \mu tan\frac{\beta}{2}}\right| cos\alpha \qquad \mathbf{0.5п} \tag{11}$$

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} ln\left|\frac{1 - \mu tan\frac{\beta}{2}}{1 + \mu tan\frac{\beta}{2}}\right| = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}\left(ln\left(1 - \mu tan\frac{\beta}{2}\right)^2 + o(\beta)\right) = 2\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}\left(ln\left(1 - \mu tan\frac{\beta}{2}\right) + o(\beta)\right) = -\mu \qquad \mathbf{2.5п} \tag{12}$$

Коначно:

$$\lim_{\beta \to 0} < P >= Mgvsin\alpha - (-\mu) \cdot Mgvcos\alpha = P_0 \qquad \mathbf{0.5п} \tag{13}$$

Дакле, видимо да је идентична ситуација у лимесу малих углова, због тога ефекат степеница нестаје. **0.5п**

РЕЗУЛТАТИ

Ранг	Име и презиме	Школа	Разред	З1	З2	З3	З4	Укупно
1.	Марко Вучић	Гимназија Бања Лука	4	16	25	25	2.3	68.3
2.	Фатих Жгаљ	Прва бошњачка гимназија, Сарајево	4	17	25	8.4	1.9	52.3
3.	Филип Лаловић	СШЦ „Источна Илиџа”	4	25	25	0	1.7	51.7
4.	Џенан Миџић	Гимназија Бихаћ	3	11	15	16	4.5	46.5
5.	Миодраг Остојић	ТШ „Михајло Пупин”, Бијељина	2	22	20	1.75	2.1	45.85
6.	Мухамед Нумановић	Бехрам-бегова медреса, Тузла	1	16	25	0	1.3	42.3
7.	Харис Имамовић	Друга гимназија, Сарајево	4	10	23.75	0	2.8	36.55
8.	Адин Фрљак	Прва бошњачка гимназија, Сарајево	3	6	16.75	6.5	0.9	30.15
9.	Елмир Кевиљ	Гимназија „Мусхин Ризвић”, Какањ	3	17.5	3	5.5	1.3	27.3
10.	Тарик Мујкић	Гимназија „Ризах Оџечкић”, Завидовићи	3	14.5	6.75	1.5	0.5	23.25
11.	Адна Мујкановић	Гимназија „Муса Ћазим Ћатић ”, Тешањ	3	10	6	0.25	0.9	17.15
12.	Спасоје Кукурић	Гимназија „Јован Дучић”, Требиње	2	0	4.25	3.2	1.9	9.35
13.	Магдалена Савић	Гимназија „Филип Вишњић”, Бијељина	4	3.5	2	0.25	0.4	6.15
14.	Лазар Миовчић	СШЦ „Источна Илиџа”	2	0	0	0	3	3
15.	Хусеин Јашић	Бехрам-бегова медреса, Тузла	2	0	0	0	1.7	1.7
16.	Јелена Јеличић	Гимназија Бања Лука	4	0	0.5	0	1.1	1.6

Ученици који ће Босну и Херцеговину представљати на 6. Европској олимпијади из физике која ће се одржати од 20.05. до 24.05. у Словенији су : Марко Вучић, Фатих Жгаљ, Филип Лаловић, Џенан Миџић и Миодраг Остојић.

Ученици који ће Босну и Херцеговину представљати на 52. Међународној олимпијади из физике су : Марко Вучић, Фатих Жгаљ, Филип Лаловић, Мухамед Нумановић и Харис Имамовић.

ДОДЈЕЛА ДИПЛОМА ЗА ПРВИХ ПЕТ МЈЕСТА